Matematica ...

Giovanni Naldi
Dipartimento ESP - Centro ADAMSS
Centro Matematita
Università degli studi di Milano

Matematica ... non solo regole

Giovanni Naldi
Dipartimento ESP - Centro ADAMSS
Centro Matematita
Università degli studi di Milano

Parte del materiale non è stato mostrato durante l'incontro ma È stato riportato nel seguito per approfondire e per curiosità.

Piccola divagazione

1600 studenti hanno svolto un tema autobiografico «Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica, dalle elementari ad oggi» (**Di Martino & Zan, 2010**).

Qualche esempio (il problema matematico)

Azzurra (III media). «***deve trovare il perimetro di un rettangolo che ha i lati di 12 cm e 8 cm. Moltiplica 12 per 8. L'insegnante le dice: "Ma perché moltiplichi? Devi trovare il perimetro…" E Azzurra: "…Divido?"….***
"Alle elementari non ero una grossa cima in matematica, quindi in 3a elementare vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me."

Per me un problema è dove bisogna pensare a se dividere, moltiplicare, addizionare, togliere i seguenti numeri **[4.a]**

"mi fa venire in mente problema di una storietta corta dove finita la storia bisogna risolverla e quando non riesco a concentrarmi sul problema mi immagino sempre: ecco perché l'hanno chiamata problema" **[4.a]**

Piccola divagazione

1600 studenti hanno svolto un tema autobiografico «Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica, dalle elementari ad oggi» (**Di Martino & Zan, 2010**).

Qualche esempio (il problema matematico)

"Per me un problema (in matematica) è un problema di una persona però da risolvere in numeri (...) Invece in italiano un problema è così: la mamma le casca il passeggino e il bimbo si fa male. Questo per me è un problema in italiano."

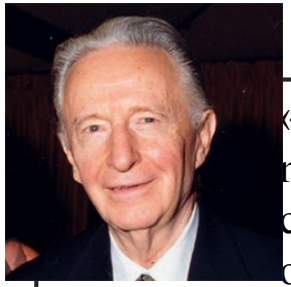
vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me."

Per me un problema è dove bisogna pensare a se dividere, moltiplicare, addizionare, togliere i seguenti numeri **[4.a]**

"mi fa venire in mente problema di una storietta corta dove finita la storia bisogna risolverla e quando non riesco a concentrarmi sul problema mi immagino sempre: ecco perché l'hanno chiamata problema" **[4.a]**

"Quale è il ruolo della matematica professore?"
"La matematica ha un ruolo centrale nella culture ..."
"Cioè a dire ... "
"...Che l'ideale di tutta la scienza è di diventare matematica .
L'ideale delle leggi fisiche è di diventare teoremi matematici,
la matematica è the end of the science".
"Anche la biologia?"
"Sì anche la biologia" .....
*Il pensiero matematico è il pensiero chiaro ...***(Giancarlo Rota in *Percorsi Calcolati* di M. Fontana, Edizioni Le Mani, Genova)**

"… la matematica non è una scienza empirica, eppure il suo sviluppo è strettamente legato a quello delle scienze naturali…addirittura non si può negare che alcune delle migliori ispirazioni in matematica, in quelle parti di essa che costituiscono la matematica pura come uno se la può immaginare, vengano dalle scienze naturali…» **(J. von Neumann, in R.B. Heywood, *The work of the mind*, University of Chicago Press, 1947).**



«… il processo di matematizzazione del reale, cioè l'utilizzo di tutti gli strumenti matematici disponibili per la rappresentazione della realtà che ci circonda ed in cui viviamo, è in continua crescita … Man mano che una disciplina cerca di organizzarsi logicamente, cioè di diventare scienza da semplice constatazione e descrizione empirica di fenomeni, essa usa inevitabilmente strumenti matematici più o meno elaborati presi ormai da tutti i capitoli della matematica…» **(E. Magenes, Centro Culturale San Carlo, 10.2.1986, Milano)**

``...O studianti studiate le matematiche, e non edificate senza fondamenti... Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione, e mai porrà silenzio alle contradizioni delle sofistiche scienzie, colle quali s'impara uno eterno gridore.'' **(Leonardo da Vinci, Fogli di Windsor, Royal Library)**

Iniziamo dal significato

μαθημα

μαθηματιχος

matemàtica e **mattemàtica** = *lat.* MATHEMATICÆ (al plur.) dal *gr.* MATHÊMATIKÈ *che concerne il sapere la scienza,* ovvero *acconcio all'imparare* (*sottint.* technè *arte*), che si collega a MÀTHEMA *disciplina, studio, scienza,* da MATHÈÔ = manthànô *imparo* [affine a matèô *investigo*], ond'anche mathêtès *discepolo,* màthêsis *cognizione, dottrina:* come dire *lo studio, la scienza per eccellenza:* dalla *rad.* MÂ variamente sviluppata, che nelle lingue arie ha il doppio senso di *misurare* e di *pensare,* che è *misurare con la mente.* [Es: *sscr.* mati [*gr.* mêtis] *pensiero,* mata *dottrina,* medha *intelligenza, sapienza; zend.* madhas *scienza, studio, arte medica,* madaya *insegnare gr.* mèdô *medito,* mèdos *consiglio, got.* miton *considerare; ant. slav.* madru *intelligente;* che stanno in confronto col *sscr.* mâtrâ [*gr.* mètron], *alb.* mate, *a. slav.* e *serb.* mata, *gael.* mead, *irl.* medh (*ebr.* mat) *misura; sved.* mäta, *got.* mitan, *lat.* metiri *misurare, gr.* màtion, *lat.* mòdios *sorta di misura,* ecc. (cfr. *Meditare, Mente* e *Metro*)] Altri invece opina formata la voce greca mãthema sulla *rad.* MATH o MANTH *agitare* [*sscr.* math-ati, manth-ati, math-nâti], d'onde poi sarebbe venuto il senso di *investigare, imparare.*

Scienza che ha per oggetto la quantità la grandezza e le sue proprietà: cosí detta perché reputata ad ogni altra superiore per utilità e per evidenza.

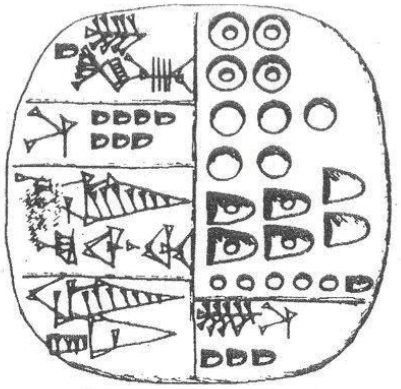
Deriv. *Matematicaménte; Matemàtico.*

Seconda divagazione

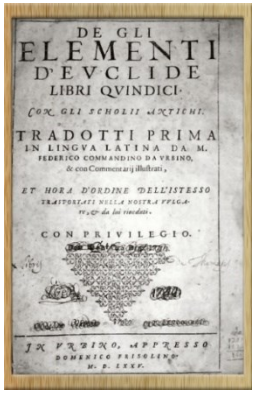
Dalla realtà alla matematica e ritorno

Osserviamo che il legame tra gli oggetti matematici e gli oggetti naturali risale alle remote origini della Matematica stessa e alle esperienze di base del contare (origine dell'Aritmetica) e del misurare (origine della Geometria).

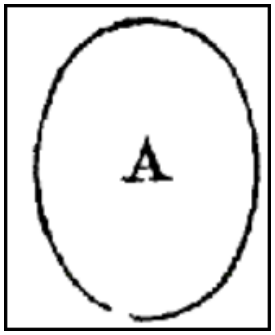
Iscrizioni su tavolette d'argilla venute alla luce in Iraq ed Iran nei siti della città pre-sumerica di Uruk e della città pre-elamita di Susa. In queste incisioni sono state rintracciate riferimenti ad un doppio sistema di numerazione (decimale e sessagesimale) oltre che a semplici algoritmi di calcolo relativi a pagamenti in orzo (la più diffusa merce di scambio del quarto millennio a.C.).



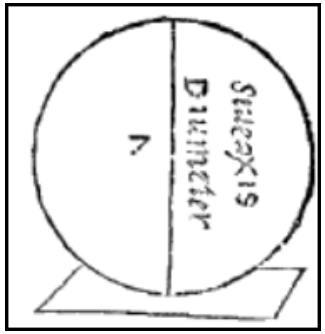
Dalla realtà alla matematica e ritorno



Elementi di Euclide (circa 300 a.C.). Troviamo definizione "operative" Che possono trovare corrispondenza con il lavoro degli agrimensori.



Il cerchio è una figura piana contenuta da una sola linea, la quale è chiamata circonferentia, in mezzo della qual figura è un ponto, dal qual tutte le linee rette, ch'escano, & uadano alla circonferentia sono fra loro equali: & quel tale ponto è detto centro del cerchio. [Libro I, Definizione 15]



La sphera è il transito del arco delia circonferentia del mezzo cerchio circondutto per fina a tanto che ritorni al luoco doue dette principio a circonuoluersi (stante il diamettro fermo e fisso.) [Libro XI, Definizione 10]

Dalla realtà alla matematica e ritorno

Deve passare molto tempo affinché la Matematica assuma un ruolo importante nello studio della realtà. Leggiamo, per esempio, il seguente richiamo del filosofo teologo scolastico medioevale Grossatesta.

"*L'utilità di considerare le linee, gli angoli e le figure è grandissima, perché senza di essi non si può conoscere la Filosofia Naturale. Essi sono validi in tutto l'universo e nelle singole parti. Hanno validità anche nelle proprietà delle relazioni, come nel moto retto e circolare*." (***Roberto Grossatesta, De lineis, angulis et figuris, 1220-1235***)

Con Galileo questo modo di guardare la natura in modo più profondo attraverso la Matematica si concretizza, il tutto è "cristalizzato" nella celebre frase (che ricorre più volte con qualche variazione nella sua opera):

"…La filosofia e` scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si puo` intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali e` scritto. Egli e` scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi e` impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi e` un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto…"
(***Galileo Galilei, Il Saggiatore***)

Dalla realtà alla matematica e ritorno

Deve passare molto tempo affinché la Matematica assuma un ruolo importante nello studio della realtà. Leggiamo, per esempio, il seguente richiamo del filosofo teologo scolastico medioevale Grossatesta.

"*L'utilità di considerare le linee, gli angoli e le figure è grandissima, perché senza di essi non si può conoscere la Filosofia Naturale. Essi sono validi in tutto l'universo e nelle singole parti. Hanno validità anche nelle proprietà delle relazioni, come nel moto retto e circolare*." (***Roberto Grossatesta, De lineis, angulis et figuris, 1220-1235***)

Con Galileo questo modo di guardare la natura in modo più profondo attraverso la Matematica si concretizza, il tutto è "cristalizzato" nella celebre frase (che ricorre più volte con qualche variazione nella sua opera):

"…La filosofia e` scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si puo` intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali e` scritto. Egli e` scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi e` impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi e` un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto…"
(***Galileo Galilei, Il Saggiatore***)

Dalla realtà alla matematica e ritorno

Deve passare molto tempo affinché la Matematica assuma un ruolo importante nello studio della realtà. Leggiamo, per esempio, il seguente richiamo del filosofo teologo scolastico medioevale Grossatesta.

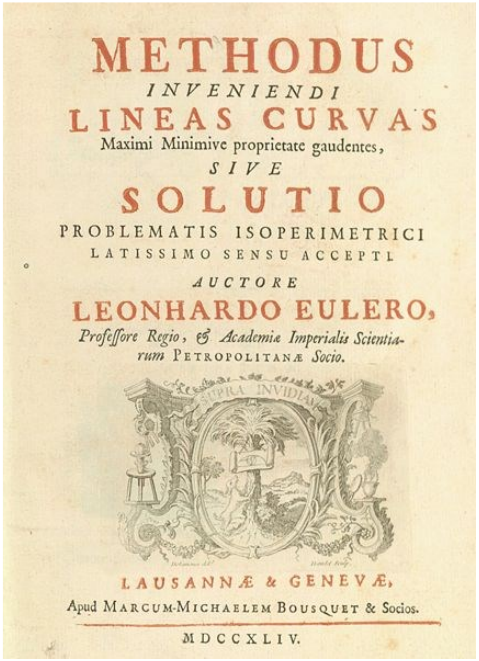
"*L'utilità di considerare le linee, gli angoli e le figure è grandissima, perché senza di essi non si può conoscere la Filosofia Naturale. Essi sono validi in tutto l'universo e nelle singole parti. Hanno validità anche nelle proprietà delle relazioni, come nel moto retto e circolare*." (***Roberto Grossatesta, De lineis, angulis et figuris, 1220-1235***)

Con Galileo questo modo di guardare la natura in modo più profondo attraverso la Matematica si concretizza, il tutto è "cristalizzato" nella celebre frase (che ricorre più vo

"…Parmi, oltre a cio`, di scorgere nel Sarsi ferma credenza, che nel filosofare sia necessario appoggiarsi all'opinioni di qualche celebre autore, sı` che la mente nostra, quando non si maritasse col discorso d'un altro, ne dovesse in tutto rimanere sterile o infeconda; e forse stima che la filosofia sia un libro e la fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando Furioso, libri ne' quali la meno importante cosa e` che quello che vi e` scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia …"
(***Galileo Galilei, Il Saggiatore***)

Dalla realtà alla matematica e ritorno

Dopo Galileo, per tutto il ’600 e il ’700, ha luogo un grandioso sviluppo della fisica che si serve potentemente dello strumento matematico. Il personaggio che meglio rappresenta questo aspetto e` probabilmente L. Euler (1707–1783).


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

Poiché infatti la fabbrica dell’Universo è perfettissima ed è governata dal creatore più sapiente, non accade nulla nel mondo, in cui non traspaia qualche ragione di massimo e di minimo; per la qual cosa non può esservi alcun dubbio che tutti gli effetti della realtà possano essere determinati col metodo dei massimi e dei minimi in modo egualmente felice che mediante le stesse cause efficienti (***Eulero, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti, 1744***)

Dalla realtà alla matematica e ritorno

La convinzione che esista un'unica Interpretazione e descrizione della realtà, Ottenibile in termini matematici, porta ad associare ad ogni insieme di fenomeni della stessa natura un'equazione (differenziale) che li rappresenti. In questo modo, D'Alembert poteva vantare, per esempio, la scoperta nel secolo dei lumi del "*vrai système du monde*". A questo gli faceva eco Laplace che intitolava una delle sue opere maggiori *Exposition du système du monde.*

"*Le equazioni differenziali della propagazione del calore esprimono le condizioni più generali, e riducono le questioni fisiche a problemi di analisi pura e questa è l'oggetto vero e proprio della teoria (…)*
Dopo aver stabilito queste equazioni differenziali, bisognava ottenerne gli integrali; il che consiste nel passare da un'espressione generale a una soluzione specifica soggetta a tutte le condizioni date. Questa ricerca difficile esigeva un'analisi speciale fondata su teoremi nuovi (…)
Lo studio profondo della natura è la fonte più fertile delle scoperte matematiche. Questo studio non ha solo il vantaggio, presentando un oggetto ben determinato di indagine, di escludere questioni vaghe e calcoli senza scopo, esso è inoltre un metodo sicuro per costruire l'analisi stessa e per scoprire gli elementi che ci interessa conoscere e che le scienze naturali devono sempre preservare: questi sono gli elementi fondamentali che si ripresentano in tutti i fenomeni naturali"
(**Jean Baptiste Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, 1822**)

Dalla realtà alla matematica e ritorno

Questa visione entra in crisi per varie ragioni. Per esempio,

-abbiamo descrizioni differenti per lo stesso fenomeno;

-fenomeni differenti descritti dalla medesima equazione
(una armonia nascosta?);

- geometrie non-euclidee e crisi dei fondamenti
(in quale geometria viviamo?);

-Meccanica quantistica (il ruolo dell'osservatore conta)

In ogni caso la fiducia nella struttura matematica della realtà resta,
si utilizzano dei Modelli

Dalla realtà alla matematica e ritorno

"I primi e più antichi problemi di ogni branca della matematica traggono certamente la loro origine dall'esperienza e sono ispirati dal mondo dei fenomeni esterni … Ma, nel progressivo sviluppo di una disciplina matematica lo spirito umano, incoraggiato dalla scoperta di soluzioni, prende coscienza della sua autonomia e crea lui stesso nuovi e fecondi problemi, nella maniera più libera, senza apparenti stimoli esterni e unicamente per combinazione logica, per generalizzazione e per particolarizzazione, per separazione ed unione di idee, giocando lui stesso allora un ruolo di primo piano nel porre questioni e sollevare problemi …

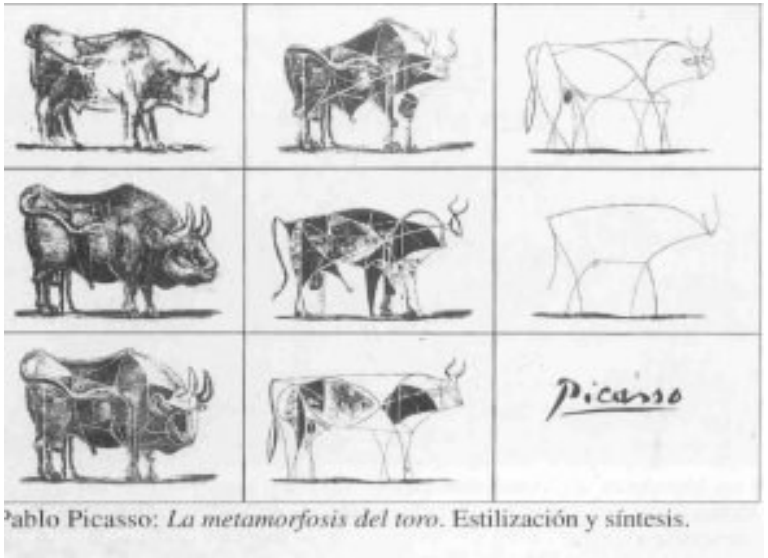
D'altra parte, sul potere creativo della pura ragione il mondo esterno esercita di nuovo la sua influenza e ci conduce attraverso fatti reali a nuove domande, ci apre nuove regioni della matematica, e mentre ci sforziamo di far rientrare questi nuovi campi della scienza sotto il dominio della ragione pura, incontriamo spesso la risposta ad antichi problemi irrisolti e facciamo avanzare le antiche teorie nel modo più fecondo. ***E' su questi reiterati scambi tra ragione ed esperienza che riposano tante analogie sorprendenti, come quell'armonia apparentemente prestabilita, tante volte notata dai matematici, tra le questioni, i modi e le concezioni dei diversi rami della loro scienza.*** *"*

(David Hilbert Mathematische Probleme, in Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, Parigi 1900)

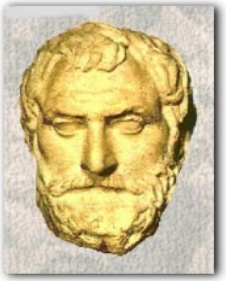
Strumento principale: <u>Modello</u>

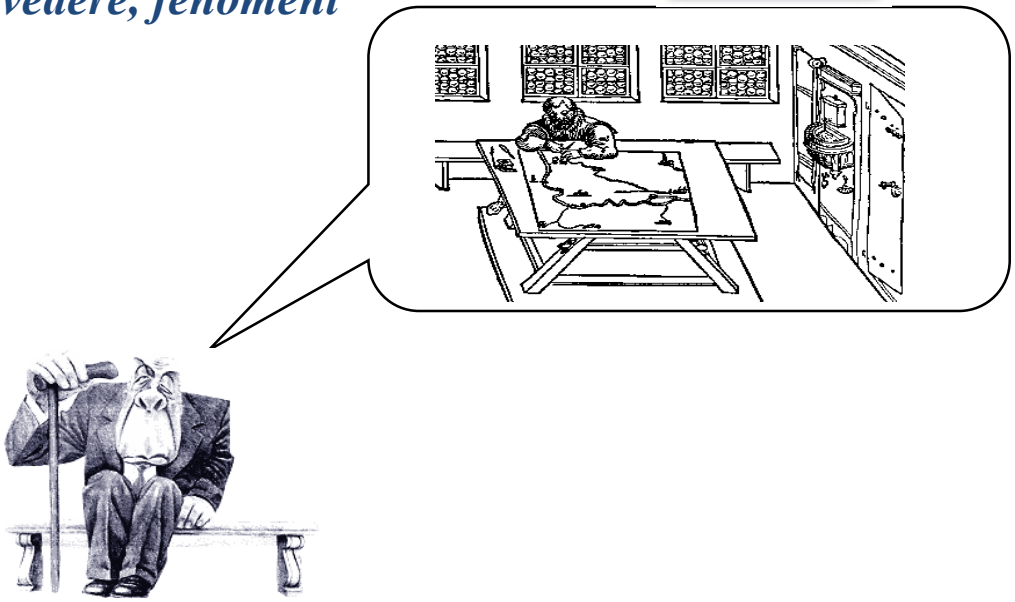
dal latino *modulus,* forma, stampo; diminutivo di *modus*, misura, norma

"…la visione delle cose nascosta è data dalle cose manifeste…"
(Anassagora di Clazomene)
quindi: sulla base di fenomeni osservati formuliamo ipotesi esplicative per leggere scientificamente, o prevedere, fenomeni osservabili



Pablo Picasso: *La metamorfosis del toro*. Estilización y síntesis.





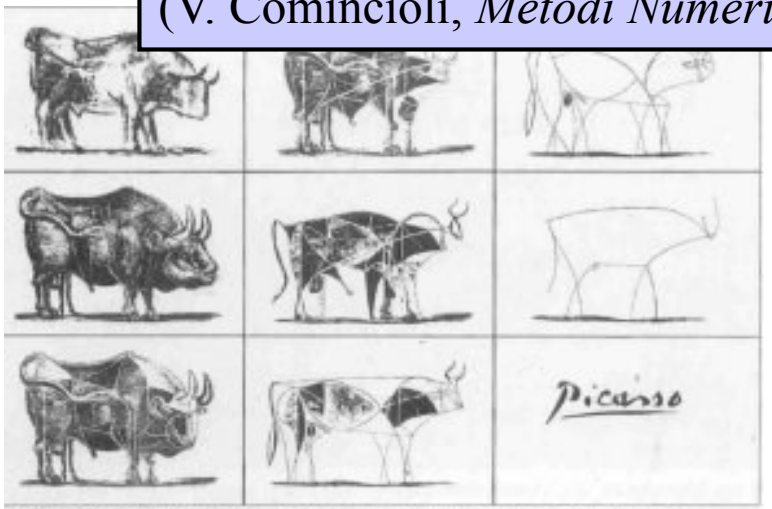
Strumento princi

Model

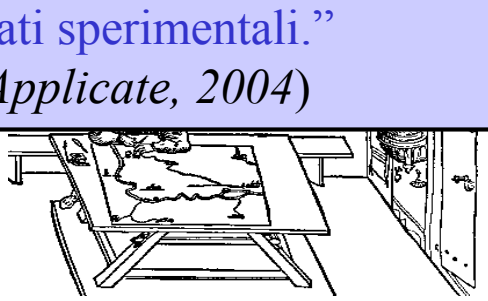
dal latino *modulus,* forma, stampo; diminutivo di

"…il ricorso a modelli di tipo matematico e statistico è sempre più frequente e si rivela spesso il sistema più idoneo ed efficace per lo studio di situazioni reali. La modellizzazion matematica, sia di tipo deterministico, sia di tipo statistico, è il principale strumento di interpretazione, simulazione e predizione di fenomeni reali. Si tratta di un processo interdisciplinare che, in modo schematico, si articola nei seguenti passi: formulazione del problema, a partire dai dati sperimentali; costruzione di un modello; elaborazione e analisi matematica del modello; calcolo della soluzione; validazione del modello, ossia confronto dei risultati con i dati sperimentali."
(V. Comincioli, *Metodi Numerici e Statistici per le Scienze Applicate, 2004*)

"…la
(Anas
quind
esplic
osser

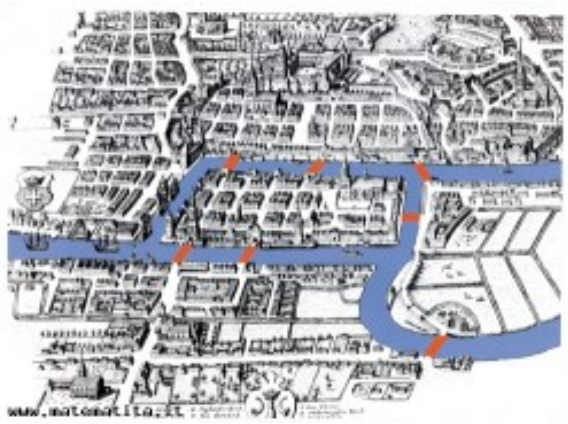


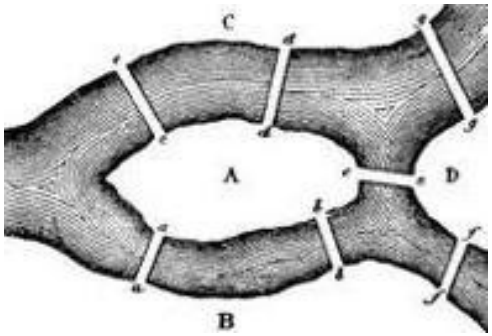
Pablo Picasso: *La metamorfosis del toro*. Estilización y síntesis.



Torniamo ai modelli …. Un esempio

Un esempio (sulla strada verso i modelli) [problema dei ponti di Königsberg, L. Euler]





La città di Königsberg è attraversata dal fiume Pregel, e un suo quartiere sorge su di un'isola (chiamata der Kneiphof) oltre la quale il fiume si spezza in due rami. A quei tempi l'isola era collegata tramite due ponti con ciascuna delle due sponde che il fiume forma prima di suddividersi, mentre la sponda situata dopo la suddivisione del fiume era collegata con un ponte sia con l'isola sia con le sponde citate precedentemente, per un totale di sette ponti. Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere un cammino semplice (ogni ponte percorso una volta sola) lungo i ponti della città in modo tale da percorrerli tutti?

Un esempio di modello

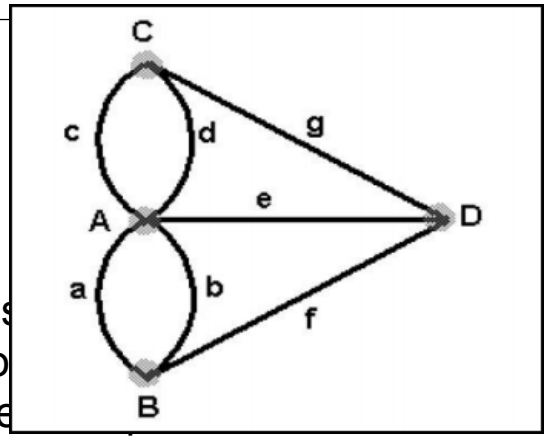
Il grande Euler scrive che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le passeggiate possibili, così facendo si potrebbe sicuramente trovare il cammino che soddisfa il problema oppure constatare che tale passeggiata non esiste. Egli escluse però subito tale metodo per due motivi.

Primo, perché i percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema.

Secondo, perché, così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni di regioni e ponti e per il loro numero.

Formalizza..
Euler inventa un modo idoneo di rappresentare i percorsi. Comincia con l'indicare con A, B, C e D le quattro regioni, come si vede nella cartina precedente e con l'indicare con a, b, c, d, e, f, g i sette ponti. Euler scrive che se il viaggiatore dovesse partire dalla regione A e, attraverso non importa quale dei ponti a o b, si recasse in B, indicherà il suo percorso con AB; se poi si recasse in D, il nuovo tratto verrebbe indicato con BD e tutto il tragitto con ABD. E se poi andasse da D a C, allora il percorso complessivo sarebbe ABDC. In generale, il numero di ponti attraversati è di uno minore del numero di lettere della parola-percorso. il percorso cercato dovrà essere descritto da una parola-percorso di otto lettere con alcuni vincoli. Esiste?

Un esempio di modello



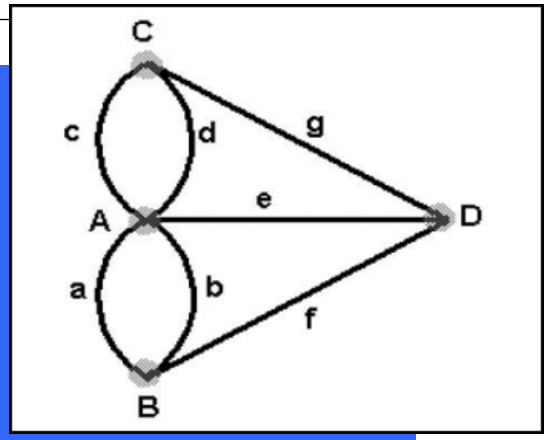
Il grande Euler scrive che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le pass
così facendo si potrebbe sicuramente trovare il cammino che soddisfa il pro
constatare che tale passeggiata non esiste. Egli escluse però subito tale me

Primo, perché i percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema.

Secondo, perché, così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni di regioni e ponti e per il loro numero.

Formalizza..
Euler inventa un modo idoneo di rappresentare i percorsi. Comincia con l'indicare con A, B, C e D le quattro regioni, come si vede nella cartina precedente e con l'indicare con a, b, c, d, e, f, g i sette ponti. Euler scrive che se il viaggiatore dovesse partire dalla regione A e, attraverso non importa quale dei ponti a o b, si recasse in B, indicherà il suo percorso con AB; se poi si recasse in D, il nuovo tratto verrebbe indicato con BD e tutto il tragitto con ABD. E se poi andasse da D a C, allora il percorso complessivo sarebbe ABDC. In generale, il numero di ponti attraversati è di uno minore del numero di lettere della parola-percorso. il percorso cercato dovrà essere descritto da una parola-percorso di otto lettere con alcuni vincoli. Esiste?

Un esempio di modello



Il problema dei ponti di Königsberg può essere rappresentato dalla seguente Figura, oggi diremmo un grafo non orientato. I punti A, B, C, D sono detti nodi, Le linee a, c, d, e, f, g si chiamano archi (o lati o segmenti). Il numero di archi che escono da un nodo si chiama ordine del nodo. Ad esempio l'ordine del Nodo A è 5 mentre l'ordine del nodo D è 3. Quando si dice "nodo pari" o "nodo dispari" si intende rispettivamente "nodo di ordine pari" o "nodo di ordine dispari". Euler dimostra che il percorso desiderato c'è solo quando tutti i nodi hanno ordine pari (tranne al più due).

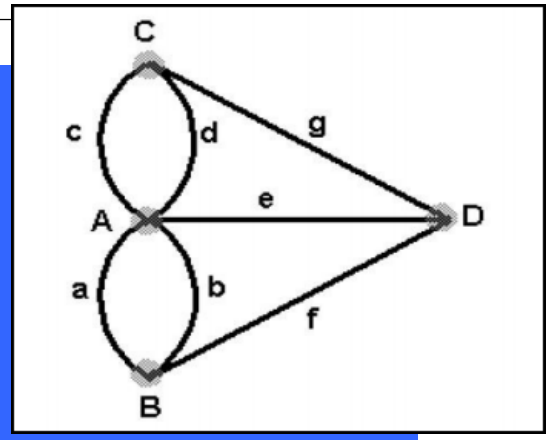
"*Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola. Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto*"

SOLVTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



essere rappresentato
grafo non orientato.
e a, c, d, e, f, g si
mero di archi che
l nodo. Ad
l'ordine del nodo
o dispari"
e pari" o "nodo di
corso desiderato c'è solo quando tutti i
).

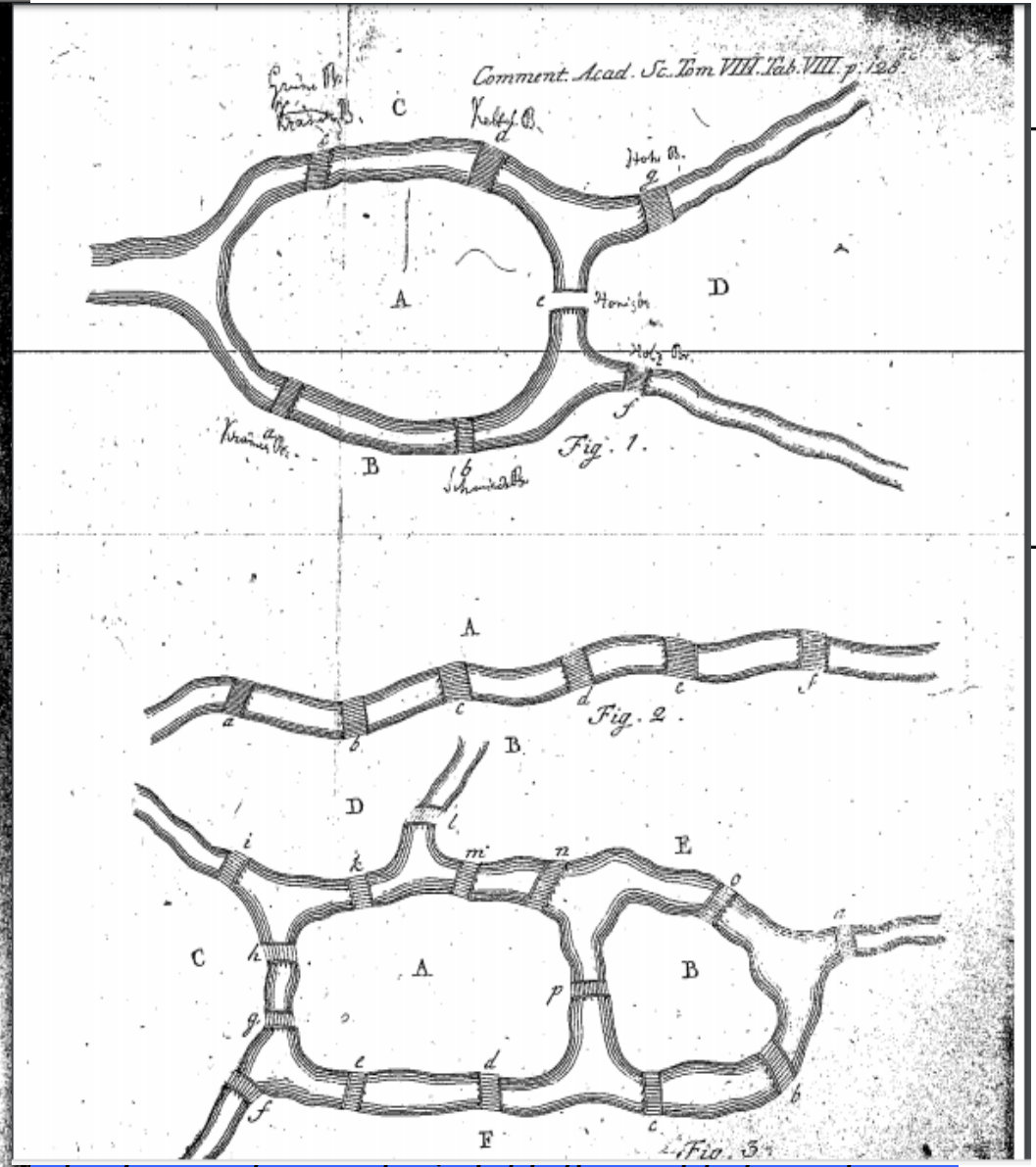
*amente e facilissimamente riconoscere se la
in forza della seguente regola. Se sono più di
ari di ponti, allora si può affermare con
solo due le regioni alle quale conducono
possibile, a condizione che si parta da una di
ro dispari di ponti, allora la passeggiata è
possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto"*

SOLVTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

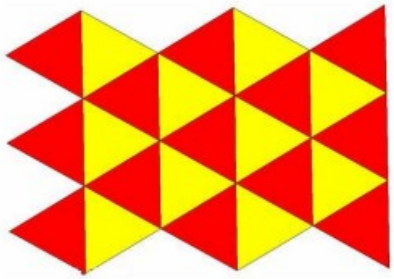
Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

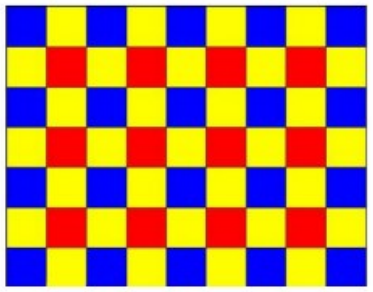


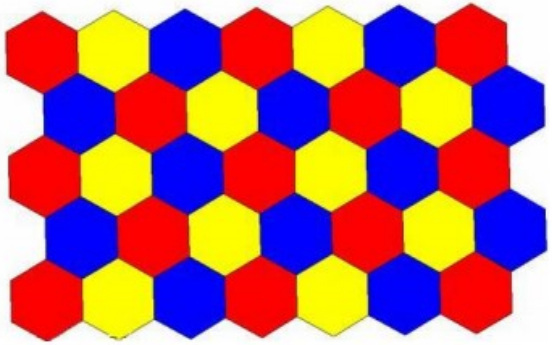
possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto”

Esempio. Tassellare un piano.

Problema. In quanti modi è possibile ricoprire un piano con piastrelle (poligoni regolari) tutte uguali?

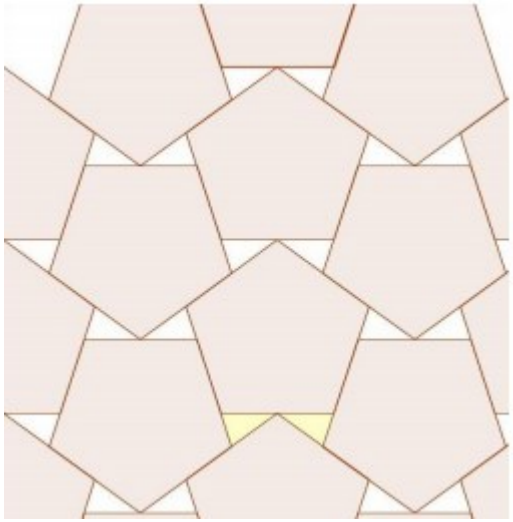






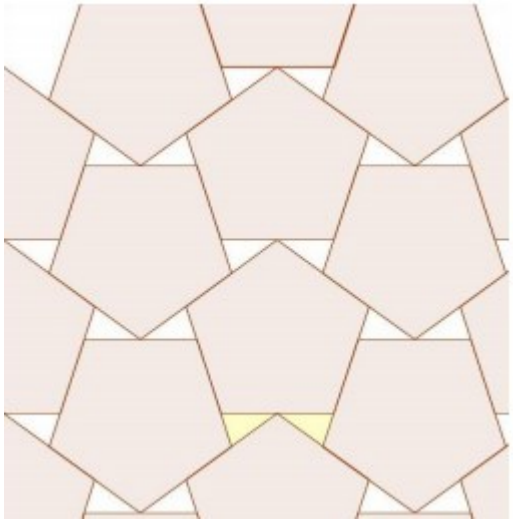
- Triangoli equilateri
- Quadrati
- Esagono regolari

Perché?

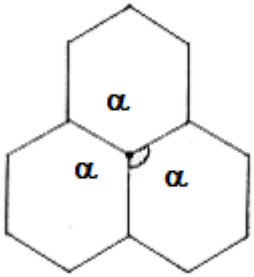


??

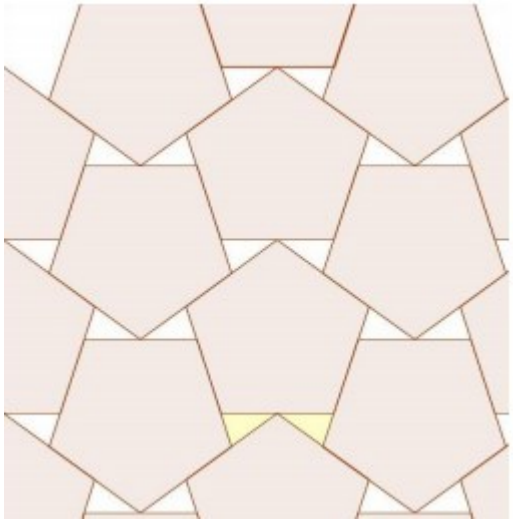
Quindi: m (N-2) = 2 N e m = 2N/(N-2) da cui N ≤ 6.
Rimangono, N=3,4,5,6 ma se N=5 segue che m=10/3 (non intero!)



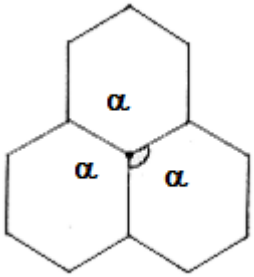
??



Quindi: m (N-2) = 2 N e m = 2N/(N-2) da cui N ≤ 6.
Rimangono, N=3,4,5,6 ma se N=5 segue che m=10/3 (non intero!)



??



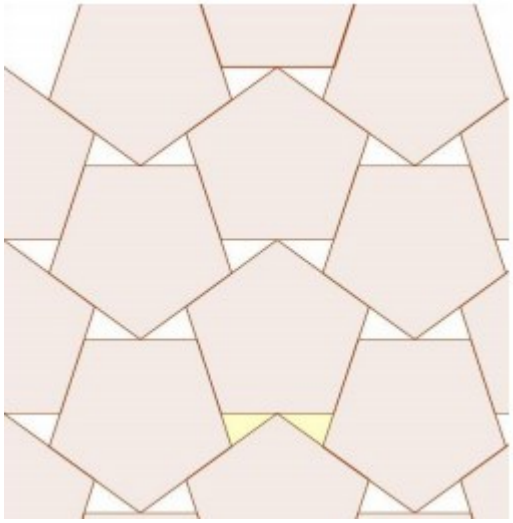
I passo

m $\alpha = 360°$

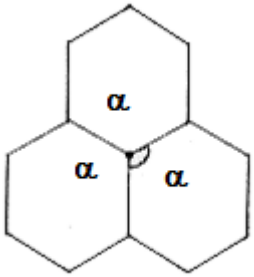
$m \geq 3$

Quindi: $m (N-2) = 2 N$ e $m = 2N/(N-2)$ da cui $N \leq 6$.

Rimangono, N=3,4,5,6 ma se N=5 segue che m=10/3 (non intero!)



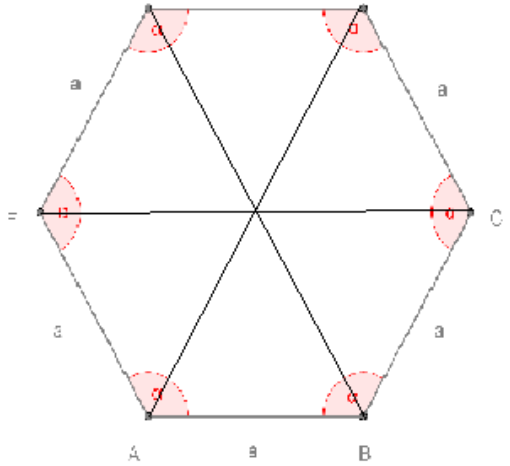
??



I passo

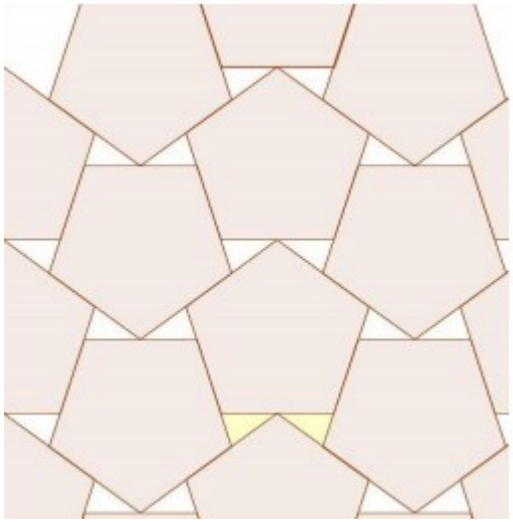
m α = 360°

m ≥ 3

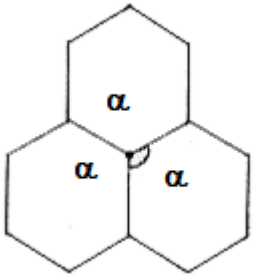


Quindi: m (N-2) = 2 N e m = 2N/(N-2) da cui N ≤ 6.

Rimangono, N=3,4,5,6 ma se N=5 segue che m=10/3 (non intero!)



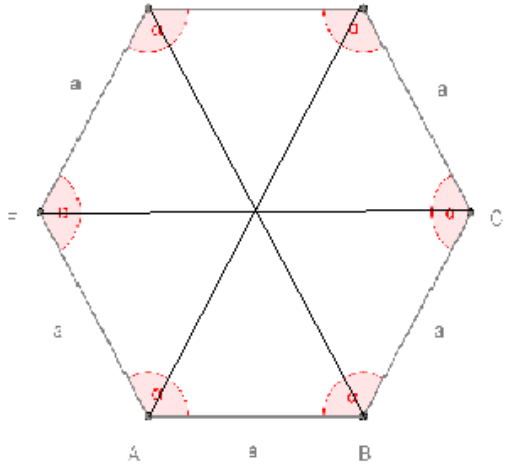
??



I passo

m α = 360°

m ≥ 3



II passo

N ·180° = N α + 360°

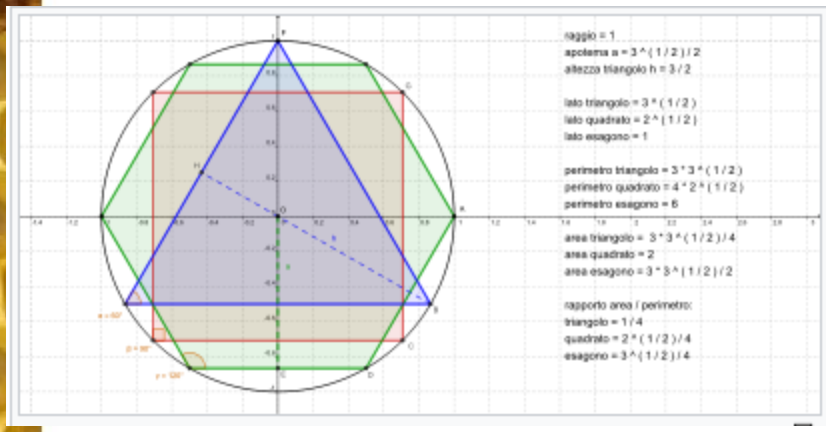
N ≥ 3

Quindi: m (N-2) = 2 N e m = 2N/(N-2) da cui N ≤ 6.

Rimangono, N=3,4,5,6 ma se N=5 segue che m=10/3 (non intero!)

Favi di api

Perché l'esagono? La scelta è indifferente? No se consideriamo il problema di «risparmiare» la cera con cui si costruisce l'alveare. Considerando la sezione piana delle celle, economizzare significa massimizzare l'area del Poligono regolare mantenendo fissata la lunghezza del perimetro.
L'esagono vince.

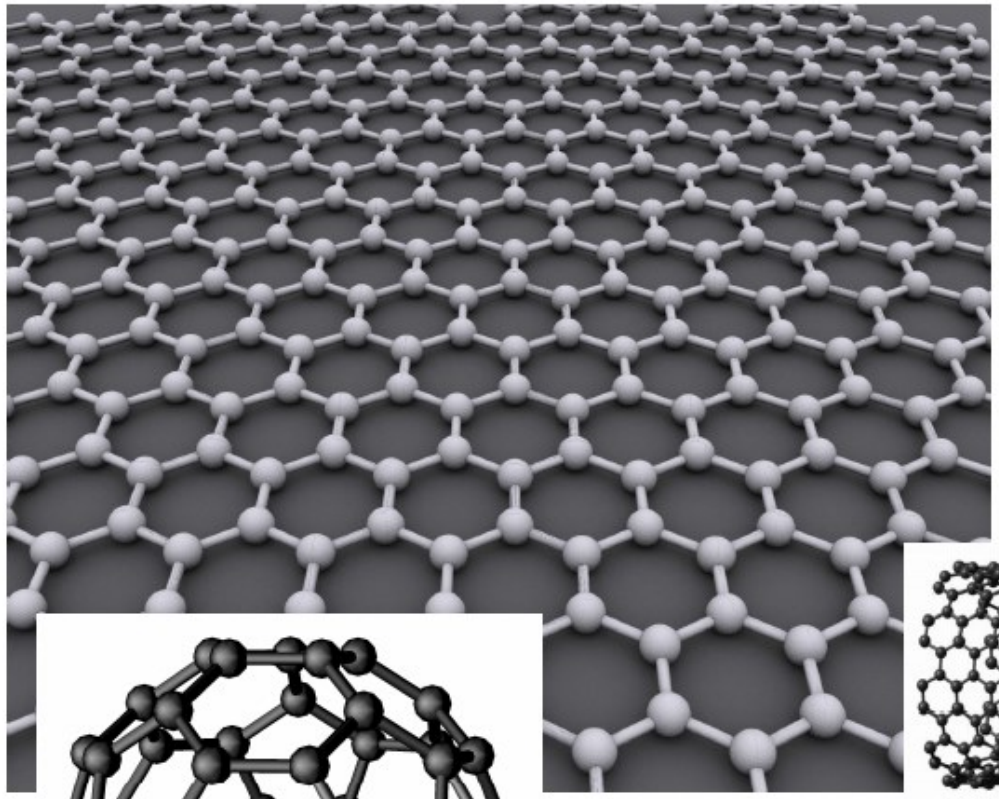


Favi di api

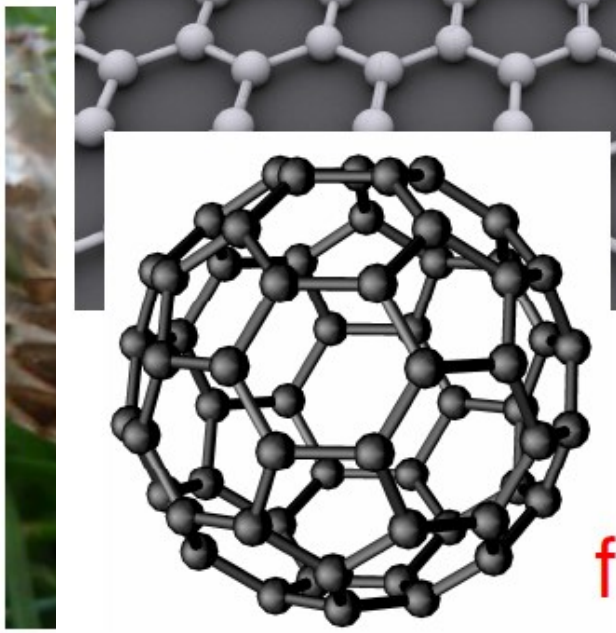
Perché l'esagono? La scelta è indifferente? No se consideriamo il problema di «risparmiare» la cera con cui si costruisce l'alveare. Considerando la sezione piana delle celle, economizzare significa massimizzare l'area del Poligono regolare mantenendo fissata la lunghezza del perimetro.
L'esagono vince.

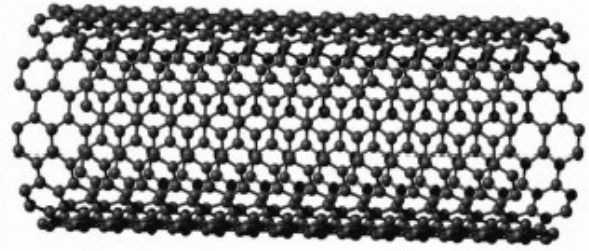
basalto
colonnare

pelli di
serpenti



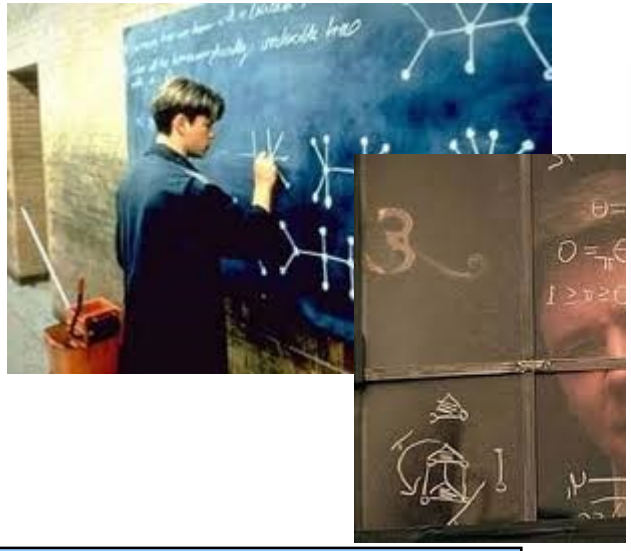
grafene

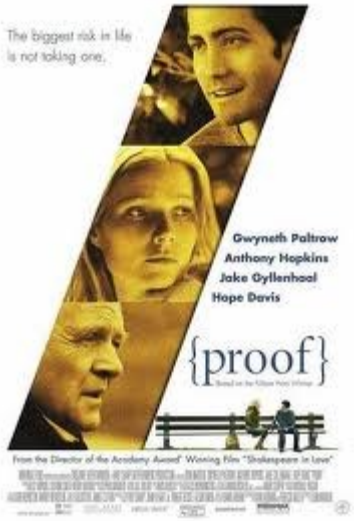




nanotubulo

fullerene





Matematica: Una finestra aperta sul mondo …
ed una finestra che permette di capire il mondo

Ma … ``***Ci sono più cose in cielo e in terra che non ne sogni la tua filosofia”***
(Shakespeare, Amleto)

https://www.youtube.com/watch?v=Kc0Kthyo0hU

Cedric Villani

Matematica: Una finestra aperta sul mondo … ed una finestra che permette di capire il mondo

Ma … ``***Ci sono più cose in cielo e in terra che non ne sogni la tua filosofia”***
(Shakespeare, Amleto)

https://www.youtube.com/watch?v=Kc0Kthyo0hU

Cedric Villani

Per riassumere ….

想 xiǎng, pensare

È composto da:

木 mù, albero

目 mù, occhio, che rappresenta l’atto di guardare

心 xīn, cuore

Un numero naturale maggiore di 1 si dice *primo* se non ammette divisori diversi da se stesso e da 1. Un numero naturale diverso da 0 e 1 si dice *composto* se non è primo.

L'opera di Euclide, Gli Elementi, contiene alcuni risultati fondamentali tra cui il teorema dell'infinità (diremmo oggi) dei primi che viene presentato nel IX libro, come proposizione 20, con le parole:

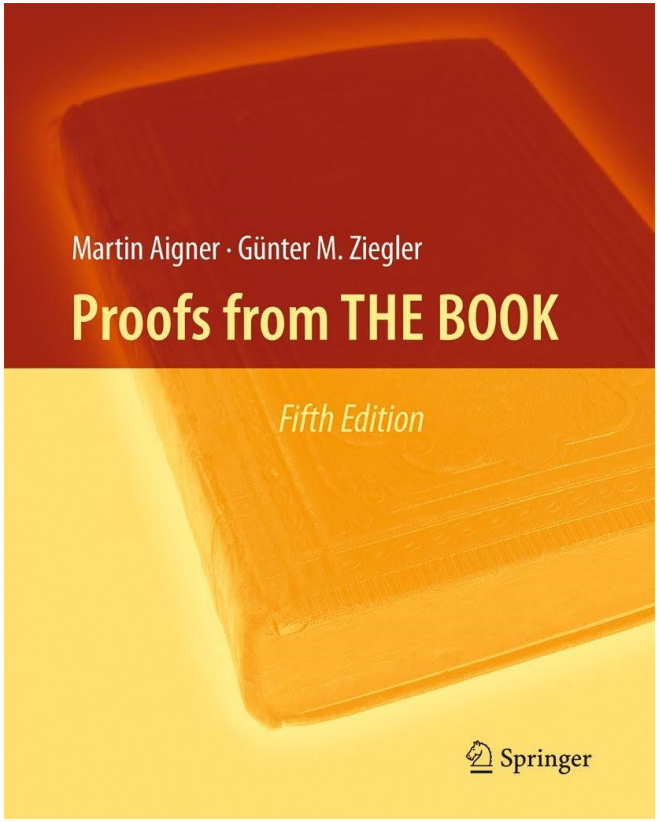
"I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi."

I numeri primi sono solamente: a, b, c, d. Calcoliamo un nuovo numero n (non sappiamo se primo o composto), n = a*b*c*d+1. Possono presentarsi due casi:

1) n è numero primo e quindi dobbiamo aggiungerlo all'elenco dei primi conosciuti;

2) n è composto e quindi è il prodotto di numeri primi, tuttavia diversi da quelli già conosciuti (infatti dividendo n per i primi già conosciuti c'è sempre il resto di 1). Anche nel secondo caso l'elenco dei primi conosciuti si allunga. L'affermazione iniziale è sempre falsa e abbiamo dimostrato il teorema

Ci soddisfa?



Dedicato a Paul Erdős.

Six proofs of the infinity of primes

Chapter 1

It is only natural that we start these notes with probably the oldest Book Proof, usually attributed to Euclid. It shows that the sequence of primes does not end.

■ **Euclid's Proof.** For any finite set $\{p_1, \ldots, p_r\}$ of primes, consider the number $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. This n has a prime divisor p. But p is not one of the p_i: otherwise p would be a divisor of n and of the product $p_1 p_2 \cdots p_r$, and thus also of the difference $n - p_1 p_2 \ldots p_r = 1$, which is impossible. So a finite set $\{p_1, \ldots, p_r\}$ cannot be the collection of *all* prime numbers. □

Before we continue let us fix some notation. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ is the set of natural numbers, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ the set of integers, and $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ the set of primes.

In the following, we will exhibit various other proofs (out of a much longer list) which we hope the reader will like as much as we do. Although they use different view-points, the following basic idea is common to all of them: The natural numbers grow beyond all bounds, and every natural number $n \geq 2$ has a prime divisor. These two facts taken together force $\mathbb{P}$ to be infinite. The next three proofs are folklore, the fifth proof was proposed by Harry Fürstenberg, while the last proof is due to Paul Erdős.

The second and the third proof use special well-known number sequences.

■ **Second Proof.** Suppose $\mathbb{P}$ is finite and p is the largest prime. We consider the so-called *Mersenne number* $2^p - 1$ and show that any prime factor q of $2^p - 1$ is bigger than p, which will yield the desired conclusion. Let q be a prime dividing $2^p - 1$, so we have $2^p \equiv 1 \pmod{q}$. Since p is prime, this means that the element 2 has order p in the multiplicative group $\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ of the field $\mathbb{Z}_q$. This group has $q - 1$ elements. By Lagrange's theorem (see the box) we know that the order of every element divides the size of the group, that is, we have $p \,|\, q - 1$, and hence $p < q$. □

■ **Third Proof.** Next let us look at the *Fermat numbers* $F_n = 2^{2^n} + 1$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. We will show that any two Fermat numbers are relatively prime; hence there must be infinitely many primes. To this end, we verify the recursion

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2 \qquad (n \geq 1)$$

Lagrange's Theorem

If G is a finite (multiplicative) group and U is a subgroup, then $|U|$ divides $|G|$.

■ **Proof.** Consider the binary relation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow ba^{-1} \in U.$$

It follows from the group axioms that $\sim$ is an equivalence relation. The equivalence class containing an element a is precisely the coset

$$Ua = \{xa : x \in U\}.$$

Since clearly $|Ua| = |U|$, we find that G decomposes into equivalence classes, all of size $|U|$, and hence that $|U|$ divides $|G|$. □

In the special case when U is a cyclic subgroup $\{a, a^2, \ldots, a^m\}$ we find that m (the smallest positive integer such that $a^m = 1$, called the *order* of a) divides the size $|G|$ of

Ennio de Giorgi Sviluppi dell'Analisi funzionale nel Novecento

Gli “enti matematici” possono essere considerati da tre punti di vista. **Un primo punto di vista è quello secondo il quale gli enti matematici esistono in sé; cioè, ad esempio, esistono effettivamente l’insieme di tutti i numeri interi, l’insieme di tutte le rette, dei cerchi, dei quadrati. Un secondo punto di vista concerne gli oggetti fisici che rappresentano gli enti matematici. Un terzo punto di vista riguarda poi il mondo delle formule, degli assiomi, del linguaggio tecnico mediante il quale questi enti vengono descritti**. Questi tre mondi sono strettamente collegati fra di loro ma non sono la stessa cosa. Fatta questa premessa, a mio avviso, le varie semplificazioni didattiche che si possono fare non contrastano più con quell’onestà intellettuale che induce a non nascondere al pubblico, per amore di chiarezza o semplicità, quelle che sono le diversità.

Volendo accennare alla diversità che sussiste tra il mondo degli enti matematici e quello delle sue rappresentazioni fisiche, possiamo riflettere su di un esempio classico, già noto nell’antichità, che è quello della diagonale di un quadrato. Tutti sanno che cos’è il quadrato e che cos’è la sua diagonale. Tuttavia, proprio in questo “tutti sanno c’è il punto delicato in cui compare la differenza tra rappresentazione fisica e quadrato ideale, che è l’oggetto proprio dello studio matematico. Infatti, se disegno un quadrato, ognuno si accorge che esso è un’immagine approssimativa del quadrato ideale della Matematica; ma anche se fossi un ottimo disegnatore ed avessi squadre, compassi ed una carta perfetta, certamente eseguirei immagini più precise, ma non disegnerei mai il vero quadrato della Matematica.

Ennio de Giorgi Sviluppi dell'Analisi funzionale nel Novecento

Gli "enti matematici" possono essere considerati da tre punti di vista. **Un primo punto di vista è quello secondo il quale gli enti matematici esistono in sé; cioè, ad esempio, esistono effettivamente l'insieme di tutti i numeri interi, l'insieme di tutte le rette, dei cerchi, dei quadrati. Un secondo punto di vista concerne gli oggetti fisici che rappresentano gli enti matematici. Un terzo punto di vista riguarda poi il mondo delle formule, degli assiomi, del linguaggio tecnico mediante il quale questi enti vengono descritti**. Questi tre mondi sono strettamente collegati fra di loro ma non sono la stessa cosa. Fatta questa premessa, a mio avviso, le varie semplificazioni didattiche che si possono fare non contrastano più con quell'onestà intellettuale che induce a non nascondere al pubblico, per amore di chiarezza o semplicità, quelle che sono le diversità.

Volendo accennare alla diversità che sussiste tra il mondo degli enti matematici e quello delle

Vi sono alcune differenze essenziali tra i quadrati disegnati ed il vero quadrato: basta riflettere su quello che è stato uno dei teoremi che a suo tempo destò maggiore scalpore nella Matematica antica. Cioè il teorema che afferma che "la lunghezza della diagonale non è commensurabile con la lunghezza di un lato, nel senso che non possiamo mai trovare due numeri interi tali che il rapporto tra la lunghezza di un lato e quella di una diagonale sia uguale al rapporto di questi due numeri interi". Questo è stato uno dei teoremi fondamentali da cui è nata la teoria dei numeri irrazionali. Per quanto possa essere raffinata la nostra capacità di disegno e di misura, non sarà mai tanto raffinata da poter distinguere un numero razionale da un numero irrazionale. Quindi, questo è un esempio di una proprietà centrale del concetto matematico di quadrato che non ha nessun riscontro in quelle che sono, invece, le proprietà visibili dei quadrati disegnati. Perciò, quando si parla d'enti matematici, occorre ricordare la

sistema ipotetico deduttivo locuzione con cui si indica una determinata modalità di strutturare una teoria scientifica. In un sistema ipotetico deduttivo sono assunti come ipotesi vere alcuni enunciati fondamentali detti → *assiomi* (per questo il sistema viene detto *ipotetico*) e da essi vengono logicamente dedotte tutte le altre affermazioni accettate nella teoria, dette *teoremi* (e per questo è *deduttivo*). Esempi di sistemi ipotetici deduttivi sono la *geometria euclidea* formalizzata secondo gli assiomi di → Hilbert e l'*aritmetica* formalizzata dagli assiomi di → Peano.

Quando un teorema è dimostrato acquista maggiore evidenza:
si vede che è vero,
si vede perché è vero,
si vede come consegue da altre verità.
Ogni teorema si appoggia su altri teoremi che a loro volta dipendono da altri teoremi…

https://www.youtube.com/watch?v=i0UTeQfnzfM

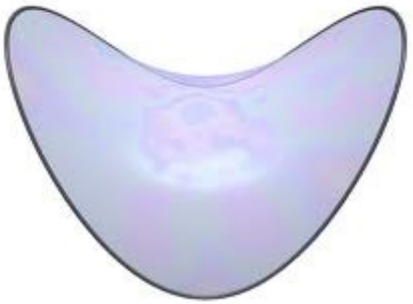
Video, Beauty Is Suffering [Part 1 - The Mathematician]

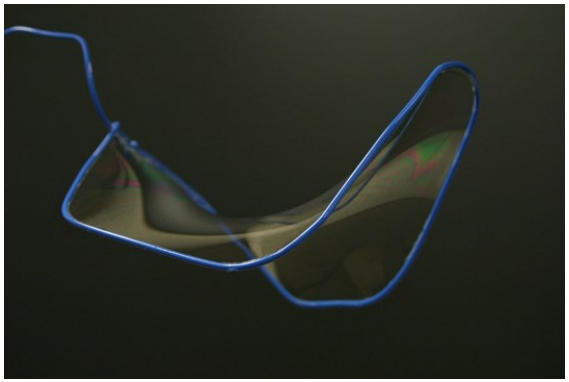
Maryam Mirzakhani

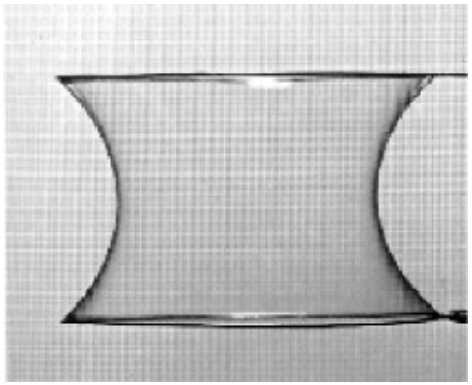
"Ma per la maggior parte del tempo fare matematica per me è come una lunga escursione senza un sentiero tracciato né un traguardo visibile."
"La bellezza della matematica si mostra solo a chi la insegue con la pazienza."
"**Devi ignorare i frutti facili da cogliere, quelli nella parte bassa dell'albero.**"
"I problemi di matematica sono come i personaggi dei romanzi. Evolvono e quando li guardi di nuovo non assomigliano più alla tua prima impressione."
"**Devi ignorare i frutti facili da cogliere, quelli nella parte bassa dell'albero.**"

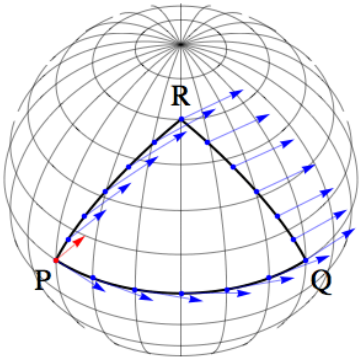
Bene, meglio, ottimo! Due passi tra massimi e minimi

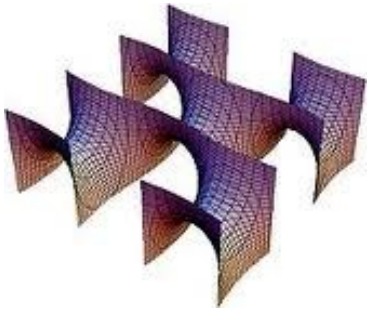
Video Antoni Gaudí,
(architettura, forma e geometria)

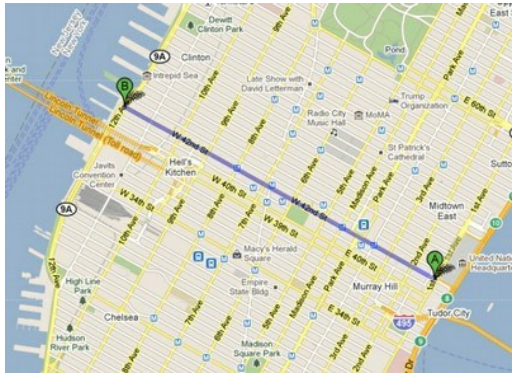












Una delle 60 Proposte di lavori per Math en Jeans:

Problema brachistocrona

Una delle 60 Proposte di lavori per Math en Jeans:

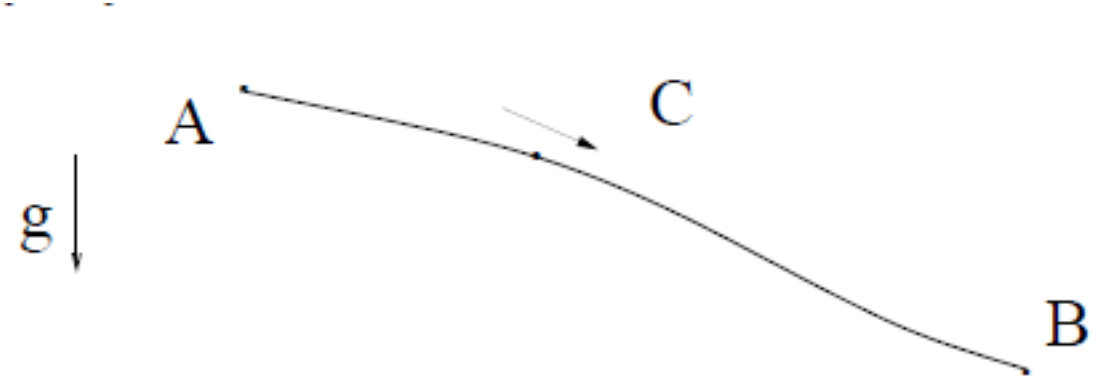
Problema brachistocrona

Una delle 60 Proposte di lavori per Math en Jeans:
Problema brachistocrona

Questo problema, e i metodi che sono stati messi in campo per risolverlo, è stato di importanza centrale per lo sviluppo del Calcolo delle Variazioni.

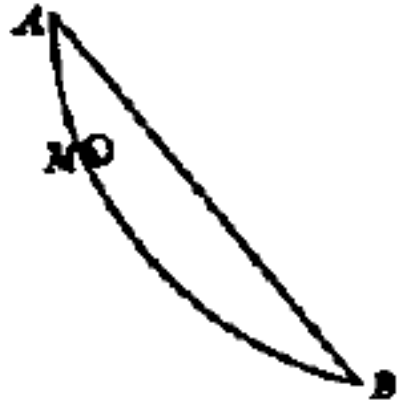
Il problema, posto da Galileo (1638), è il seguente:

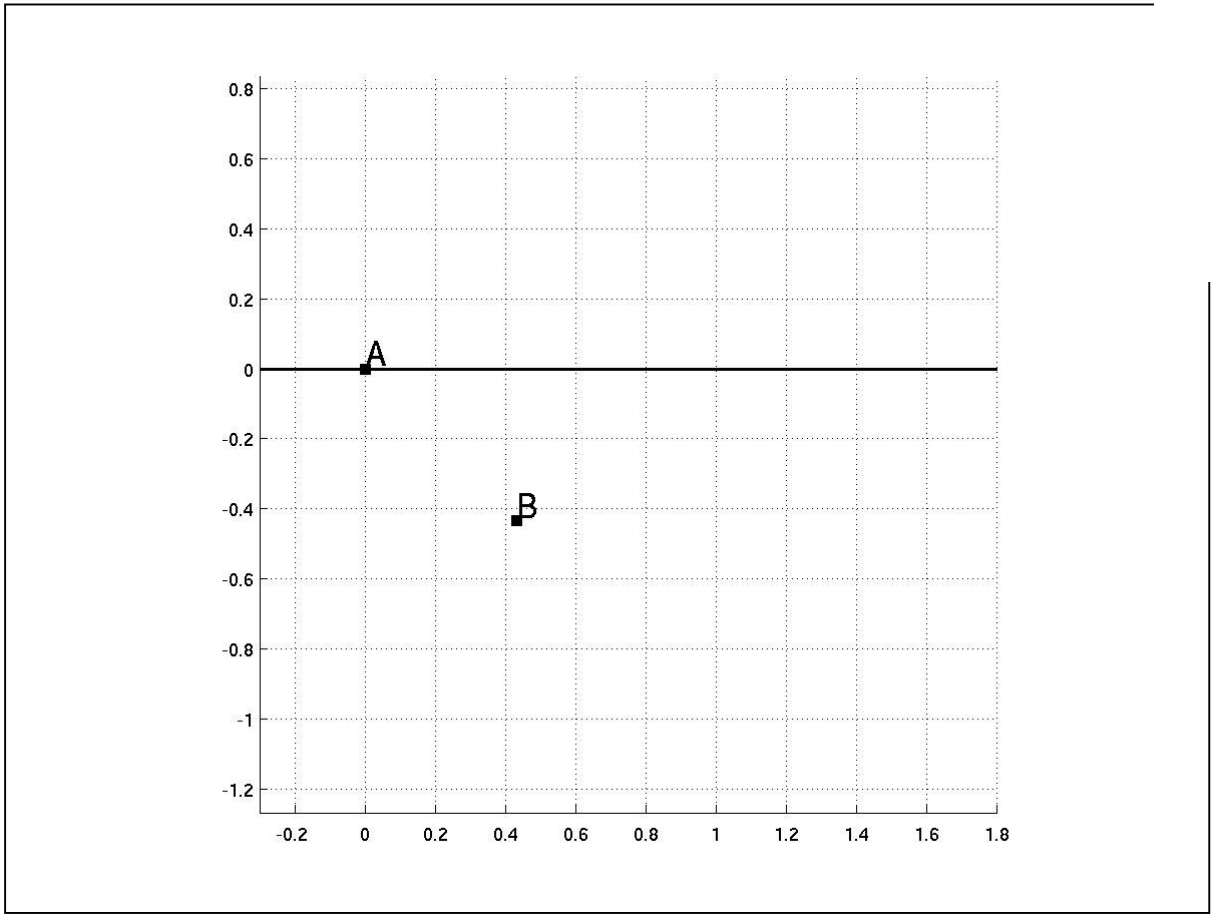
dati due punti A e B, con B posto a un'altezza inferiore rispetto ad A, si consideri una curva C congiungente A a B e il tempo T(C) che una pallina impiega per scivolare lungo la curva, da A a B (si trascurano le forze di attrito e si suppone la pallina puntiforme e la velocità iniziale nulla). Qual'è la curva che ha un tempo di percorrenza minimo ?



Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

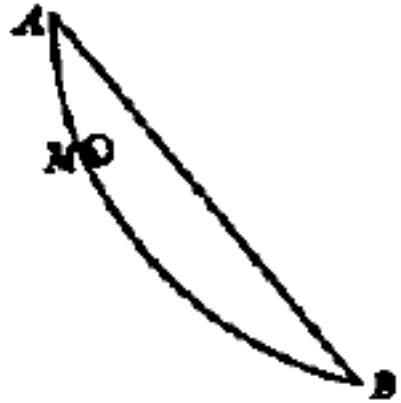
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

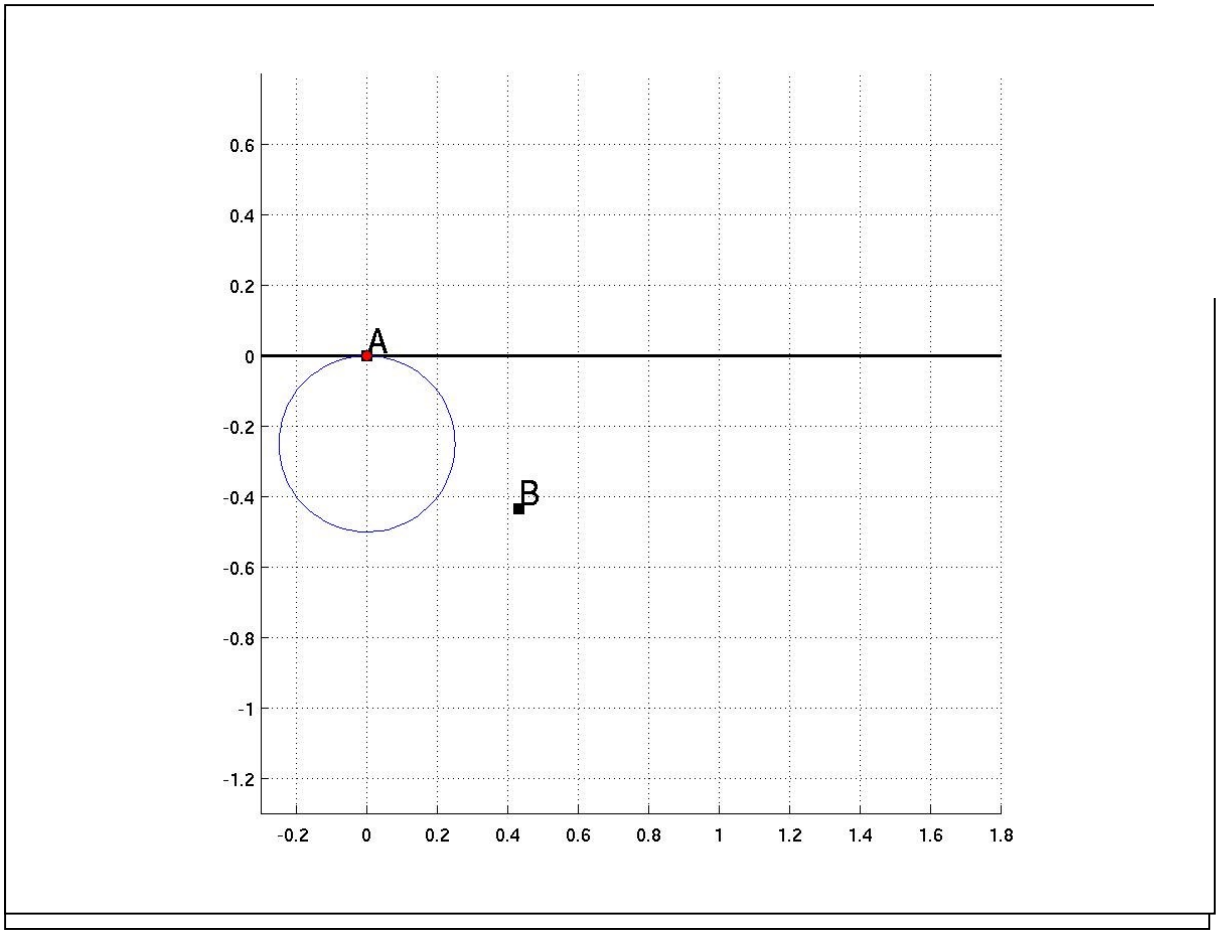




Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

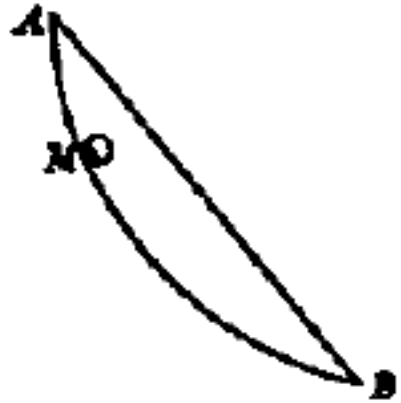
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

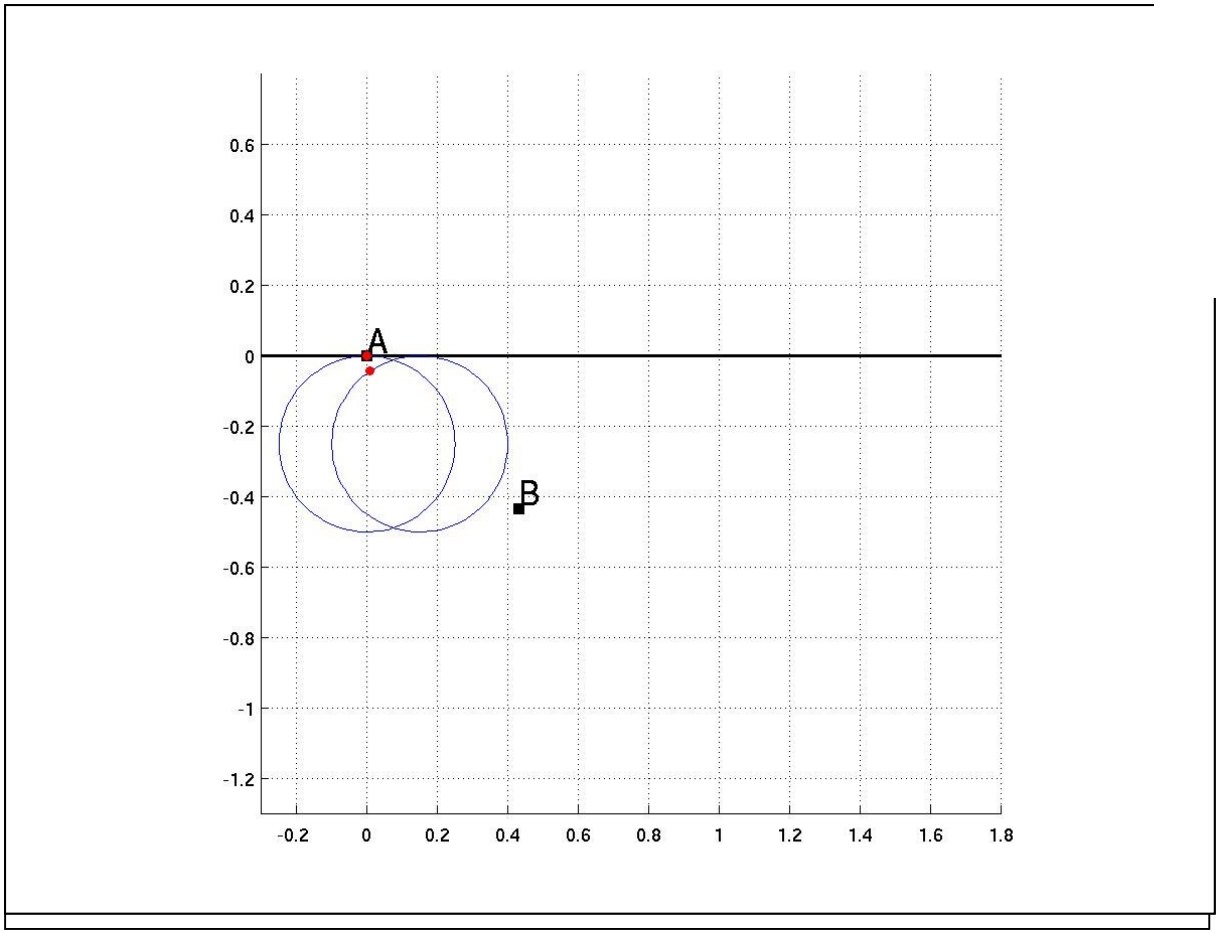




Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

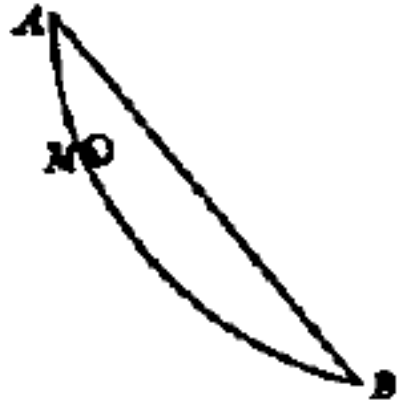
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

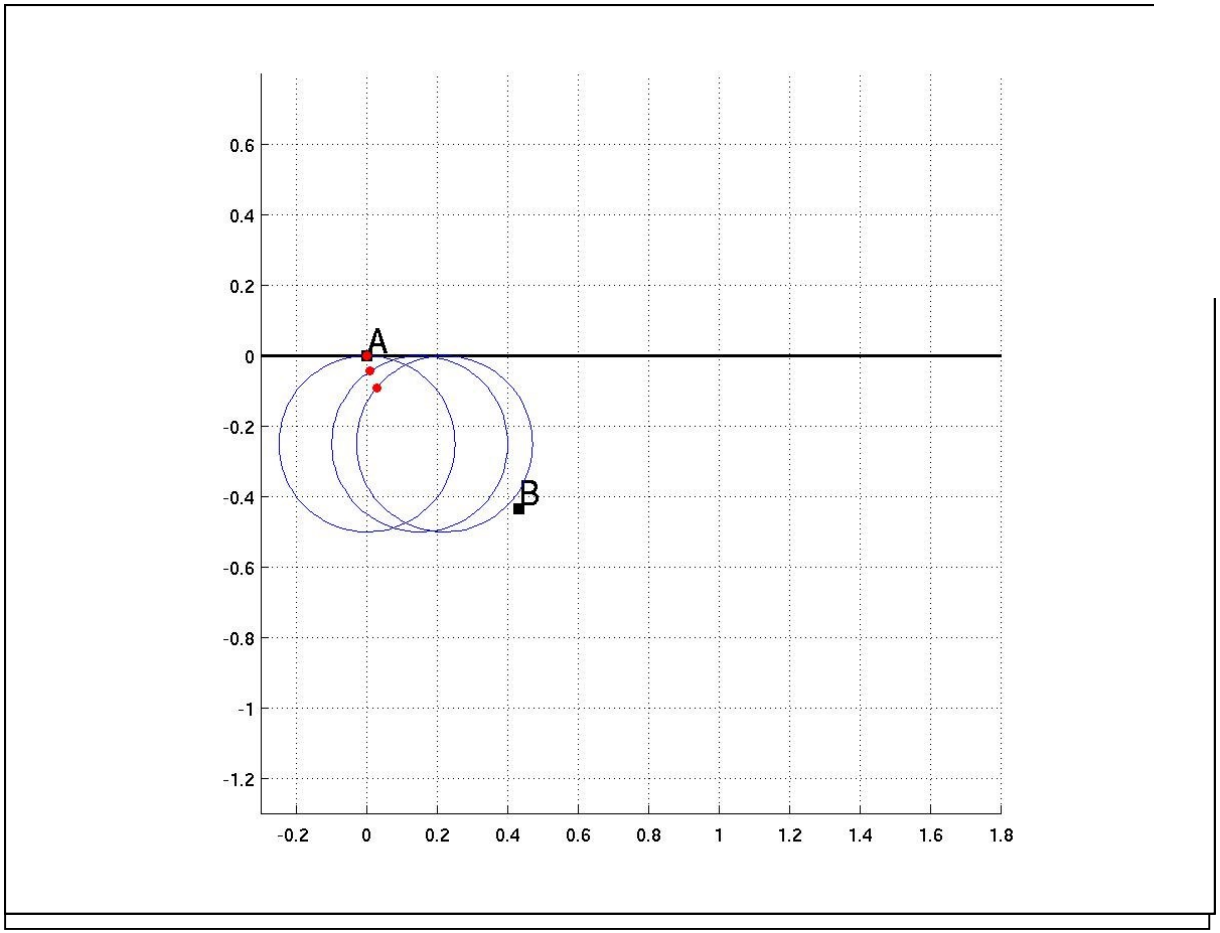




Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

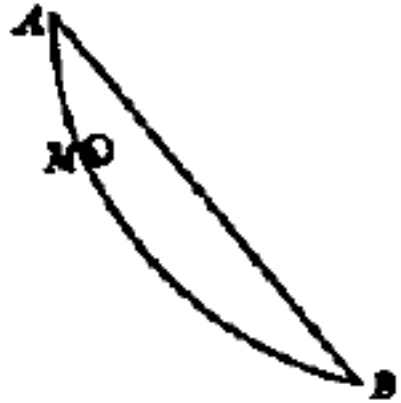
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

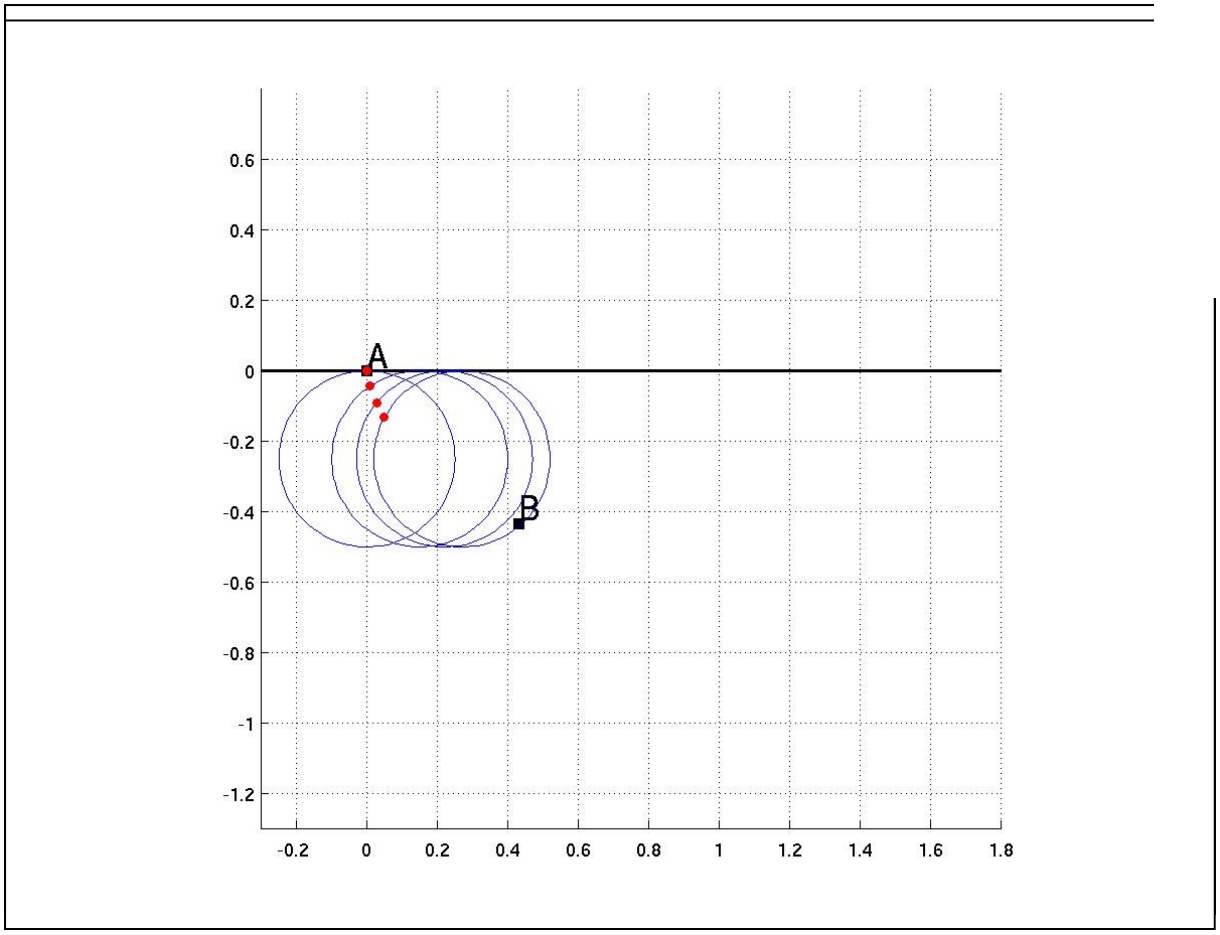




Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

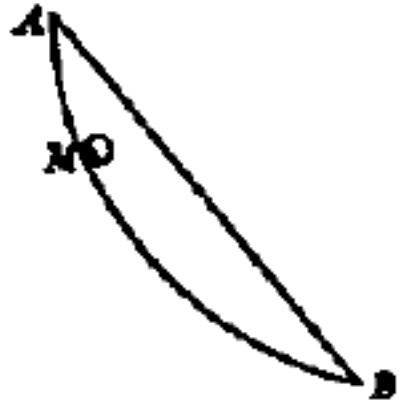
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

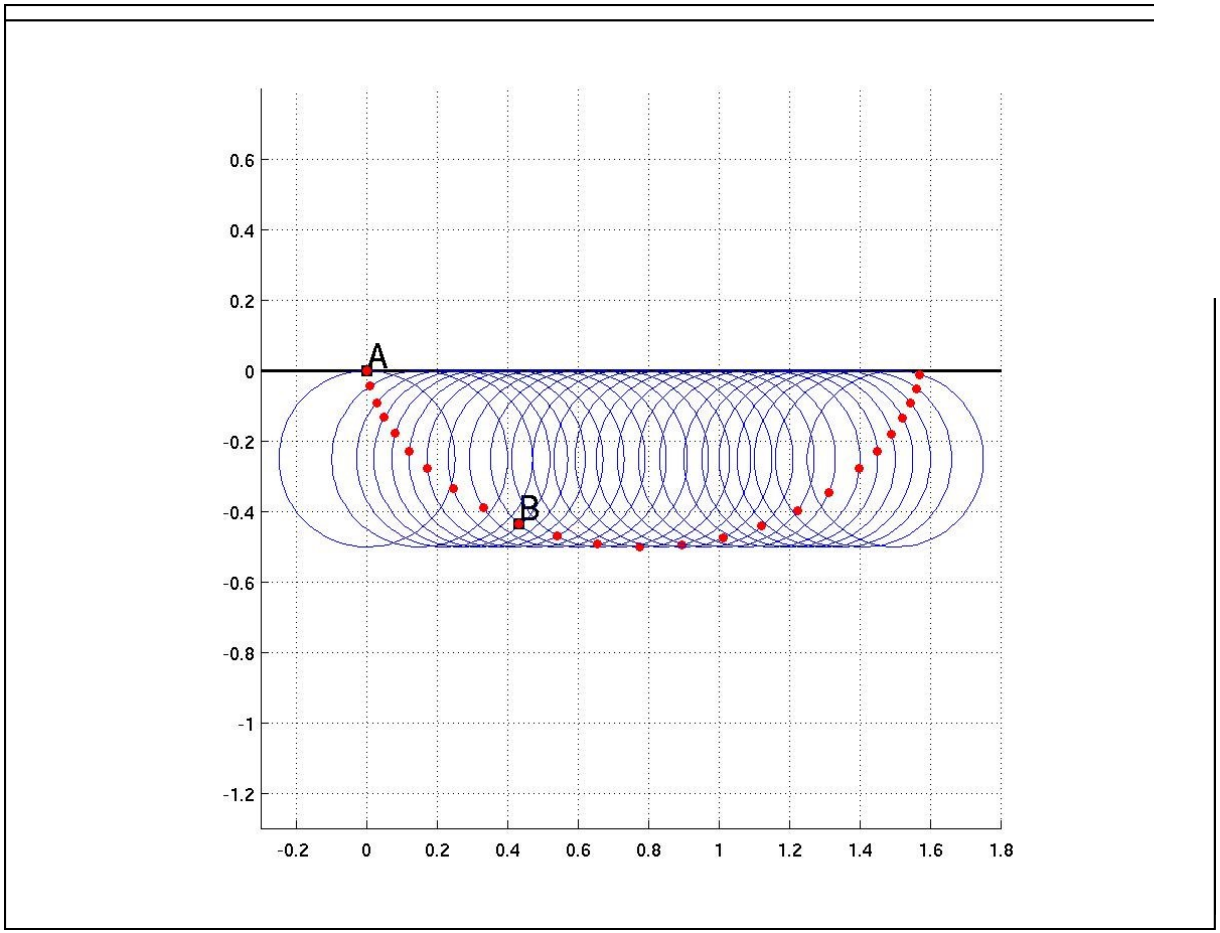




Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

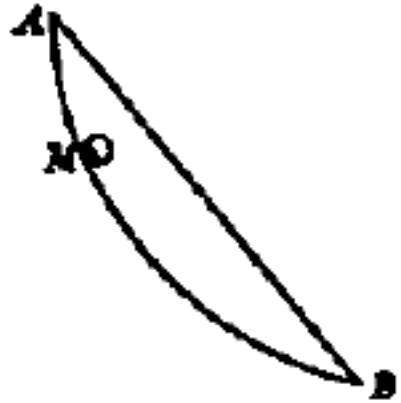
Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]

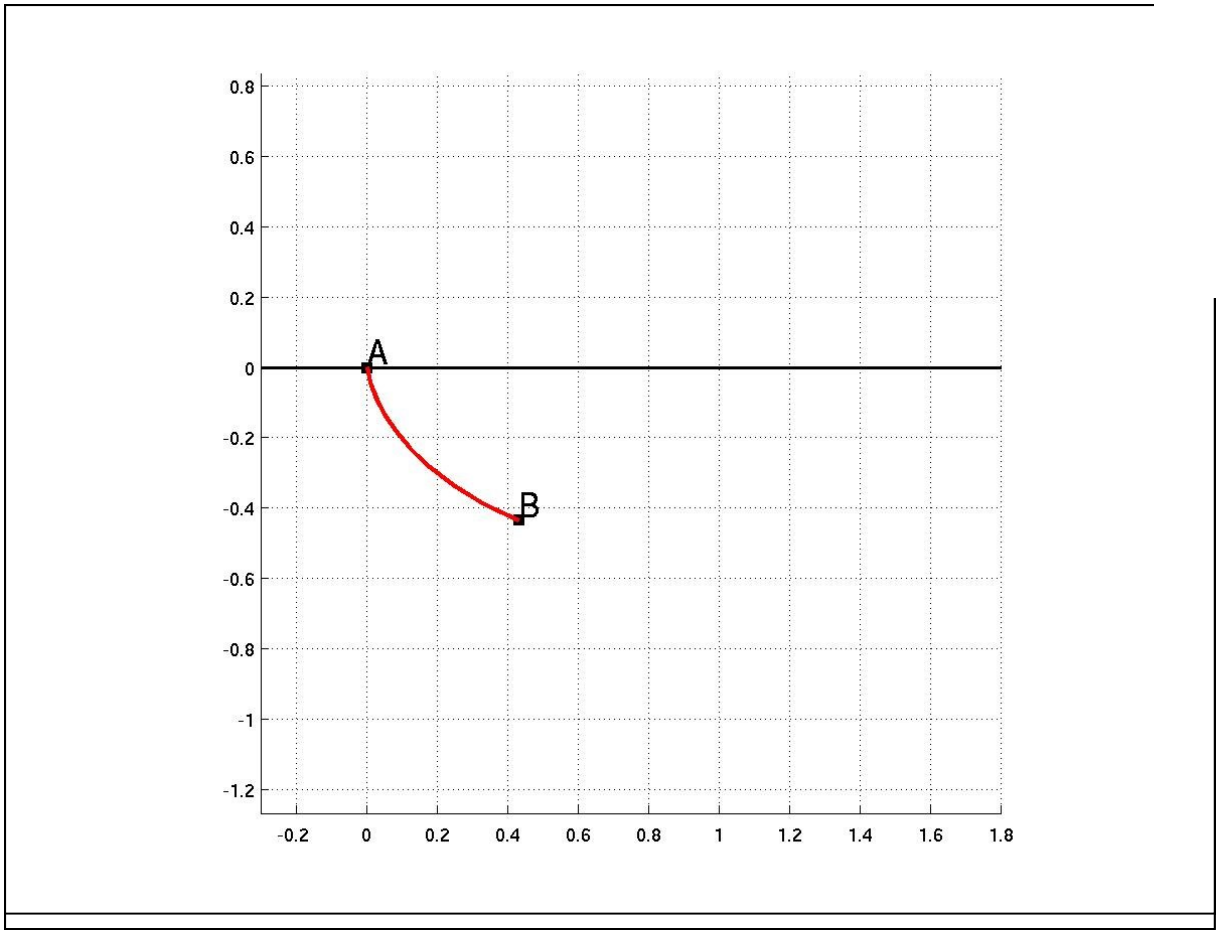




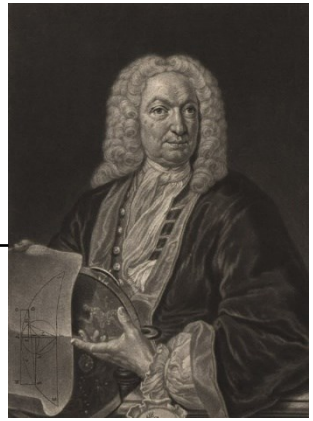
Ripreso da Giovanni Bernoulli negli *Acta Eruditorum* (Leipzig, 1696)

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.[1]



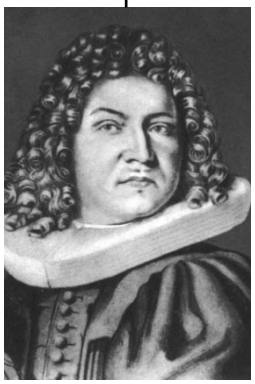


ALbero Familiare Bernoulli



Nicolaus

Jacob | Nicolaus | Johann



Nicolaus I

Nicolaus II | Daniel | Johann II

Johann III | Daniel II | Jacob II

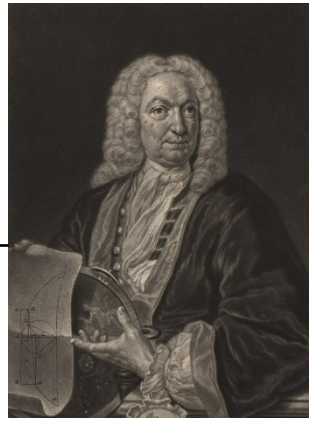
ALberc li

- Calcolo differenziale integr
- Calcolo dele variazioni
- Teoria Probabilità
- numeri di Bernoulli

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum B_n \frac{x^n}{n!}$$

Jacob

N laus I



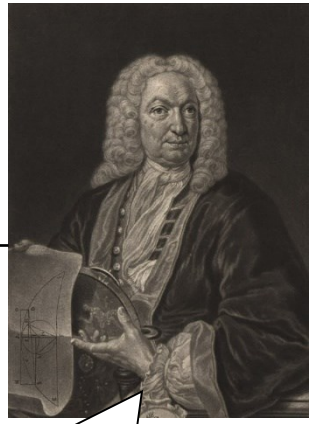
Nicolaus II Daniel Johann II

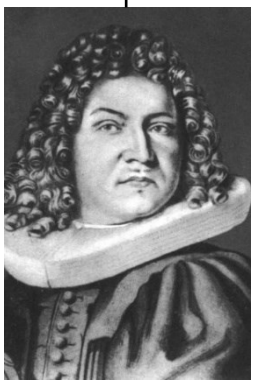
Johann III Daniel II Jacob II

ALbero Familiare Bernoulli

Nicolaus

Jacob | **Nicolaus** | **Johann**





Nicolaus I

Nicola

- **Regola de l'Hospital**
- **Calcolo integrale/differenziale**
- **Brachistocrona**

acob II

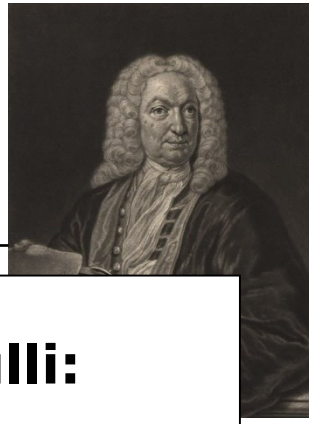
ALbero Familiare Bernoulli

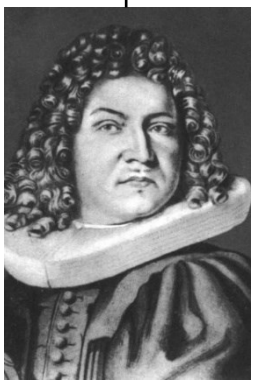
Nicolaus

Jacob

Nicolaus

Johann





Nicolaus I

Nicolaus

- **Legge di Bernoulli:**

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^{\,2} = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^{\,2}$$

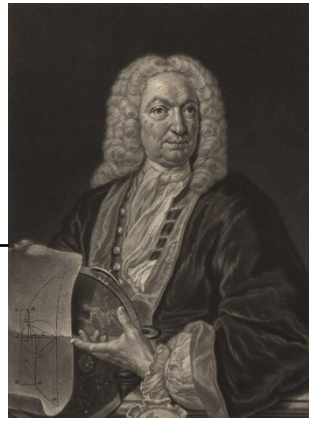
- **Polinomi Bernoulli:**

$$b_n(x) = \sum \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$$

Daniel II

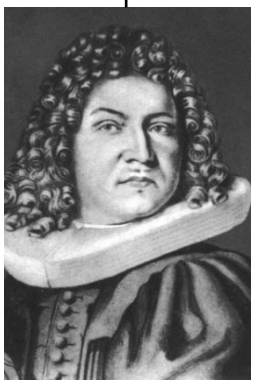
Jacob II

ALbero Familiare Bernoulli



Nicolaus

Jacob | Nicolaus | Johann

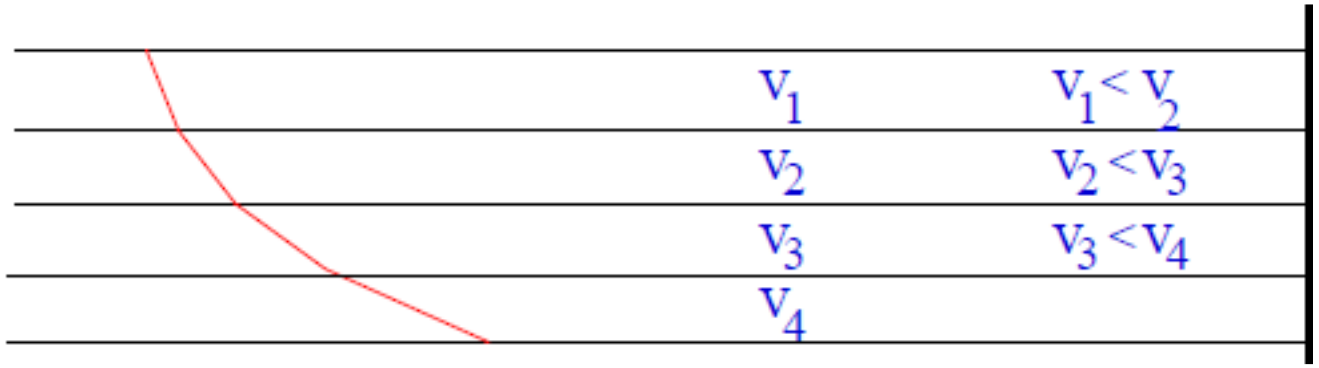


Nicolaus I

Nicolaus II | Daniel | Johann II

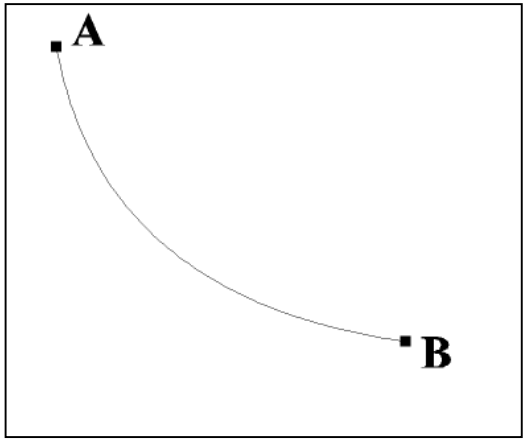
Johann III | Daniel II | Jacob II

La soluzione di questo problema fu trovata da Jakob Bernoulli nel 1697. L'idea di Bernoulli fu di trasformare il problema meccanico in un problema di ottica geometrica, di rifrazione in un mezzo avente densità ottica variabile e dipendente dall'ordinata y (in modo che la luce si propaghi sempre più lentamente al crescere di y). Applicando ripetutamente la legge della rifrazione, attraverso un'approssimazione basata su suddivisioni in strati sempre più sottili, egli dedusse la forma della cicloide.

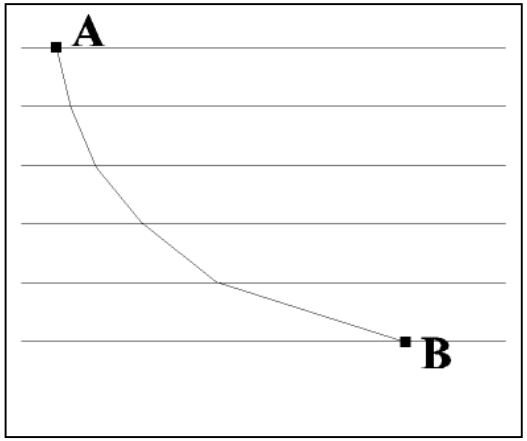


Soluzione di Bernoulli

Soluzione di Bernoulli

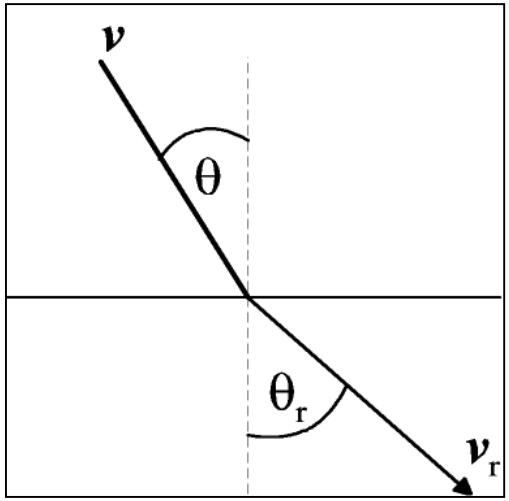


Soluzione di Bernoulli



Soluzione di Bernoulli

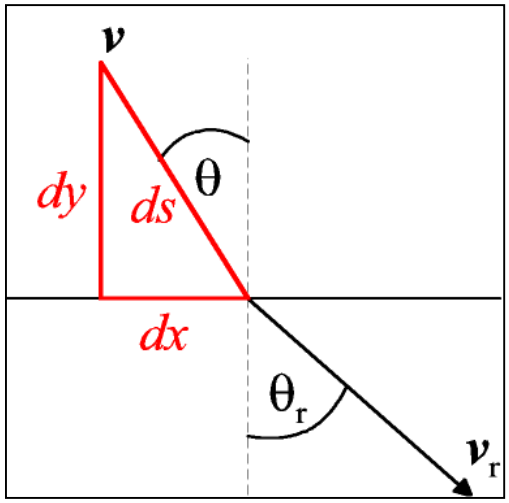
Legge di Snell: $\dfrac{\sin\theta}{v} = \dfrac{\sin\theta_r}{v_r}$



Soluzione di Bernoulli

Legge di Snell: $\frac{\sin\theta}{v} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$

In ogni strato: $\sin\theta = \frac{dx}{ds}$

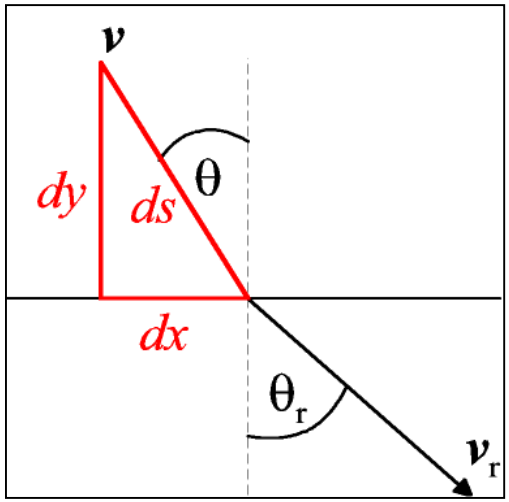


Soluzione di Bernoulli

Legge di Snell: $\dfrac{\sin\theta}{v} = \dfrac{\sin\theta_r}{v_r}$

In ogni strato: $\sin\theta = \dfrac{dx}{ds}$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_r}\frac{dx_r}{ds_r}$$



Soluzione di Bernoulli

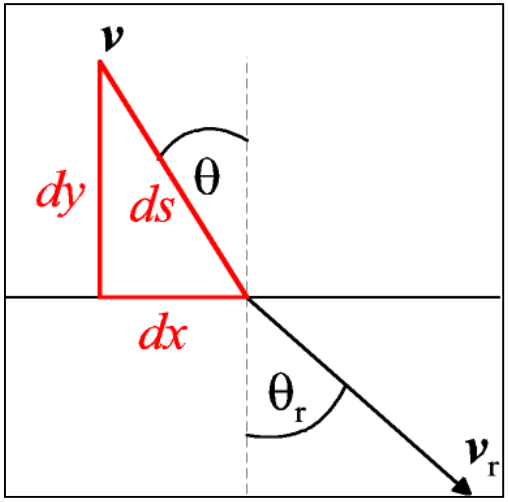
Legge di Snell: $\dfrac{\sin\theta}{v} = \dfrac{\sin\theta_r}{v_r}$

In ogni strato: $\sin\theta = \dfrac{dx}{ds}$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_r}\frac{dx_r}{ds_r}$$

$\dfrac{1}{v_r}\dfrac{dx_r}{ds_r}$ **è costante in un "tempo infinitesimale"**

$$\longrightarrow \quad \frac{dx}{ds} = cv$$



Soluzione di Bernoulli

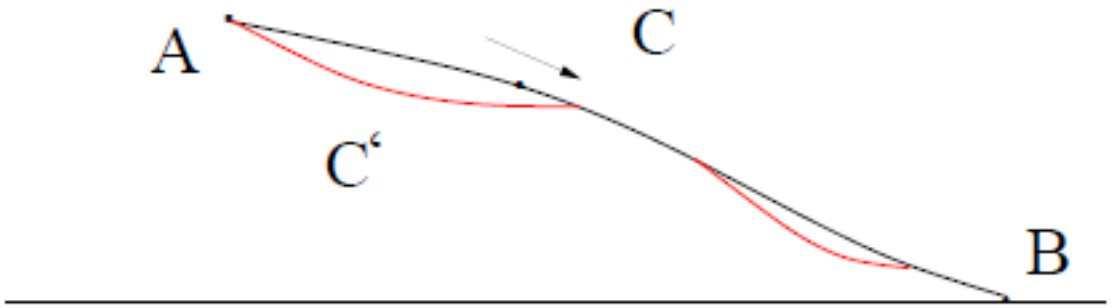
$$\frac{dx}{ds} = cv$$

Da: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ **e** $v = \sqrt{2gy}$

$$\longrightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] y = k^2$$

- **Leibniz: più o meno la stessa dimostrazione**
- **Newton: non ha mostrato la soluzione**

Tuttavia il metodo di Bernoulli ha un carattere **ad hoc** e non può essere applicato a problemi più generali.
È grazie a **Eulero** e a **Lagrange** che questo e altri problemi trovano una soluzione soddisfacente. Il loro metodo consiste nel fare piccole variazioni C' della curva, e di calcolare $\Delta T = T(C') - T(C)$ in corrispondenza di tali variazioni.



In corrispondenza della curva C di lunghezza minima queste variazioni si devono bilanciare e questo individua, tra tutte le curve, una sola classe di curve, le cicloidi (qui A = (0, y0) e B = (x0, 0)):

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = y_0 - R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Sul piano più “strettamente matematico” questo procedimento presuppone una formula esplicita per la funzione che a C assegna T(C).

Il tempo totale T di percorrenza lungo la curva u(x) sarà quindi:

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + |u'(x)|^2}{y_1 - u(x)}}\, dx$$

e si avrà il problema di minimo:

$$\min \left\{ T(u) \ : \ u(x_1) = y_1, \ u(x_2) = y_2 \right\}$$

https://www.youtube.com/watch?v=li-an5VUrIA
VIDEO Brachistrocona

Sul piano più “strettamente ma
presuppone una formula esplic T(C).

Il tempo totale T di percorrenz

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e si avrà il problema di minir

$$\min\{T(u)$$

https://www.youtube.com/watch?v=li-an5VUrIA
VIDEO Brachistrocona

- Soluzione di molti problemi richiedono l’ottimizzazione (massimo o minimo) di quantità *I* (***funzionali***),
  - Distanza
  - Tempo
  - Area superficiale
  - Principio di Dirichlet – uno stato stazionario di energia

- *I* dipende da un “cammino” *u* e da un dominio di interesse D:

- Terminologia:
  - Funzionale – La quantità *I* da ottimizzare
  - Estremali – La soluzione *u* che realizza massimo o minimo di *I*

Sul piano più “strettamente ma… presuppone una formula esplic… T(C).

Il tempo totale T di percorrenz…

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e si avrà il problema di minir…

$$\min\{T(u)$$

https://www.youtube.com/watch?v=li-an5VUrIA

VIDEO brachistocrona

- Soluzione di molti problemi richiedono l’ottimizzazione (massimo o minimo) di quantità *I* (***funzionali***),
  - Distanza
  - Tempo
  - Area superficiale
  - Principio di Dirichlet – uno stato stazionario di energia

- *I* dipende da un “cammino” *u* e da un dominio di interesse D:

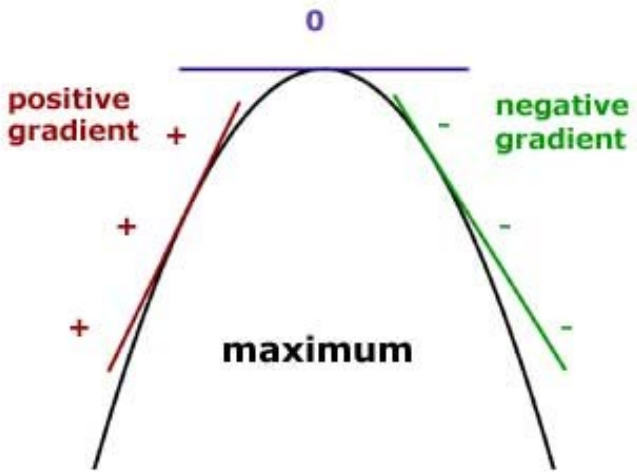
$$I = \int_D F(x,u,u_x)dx$$

- Terminologia:
  - Funzionale – La quantità *I* da ottimizzare
  - Estremali – La soluzione *u* che realizza massimo o minimo di *I*

Analogie con il “Calcolo classico”

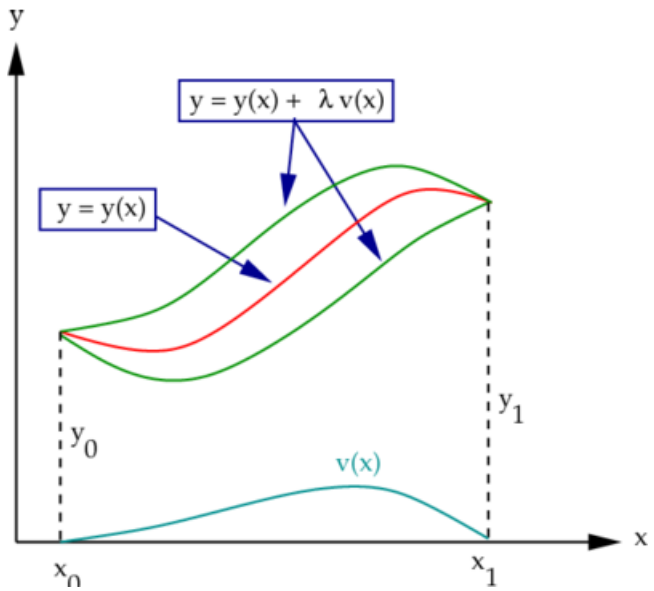
- Calcolo differenziale una variabile:
  - Funzioni continue ammettono valori estremi in un dominio compatto.
  - Condizione necessario per un punto estremo x_0, interno al dominio se f è differenziabile:

$$f'(x_0)=0$$



- Calcolo delle variazioni (Pb semplice):
  - Estremi $u(x)$ per funzionali
  - *Funzioni* test v(x), che si annullano nei punti di bordo utilizzate per trovare estremali:

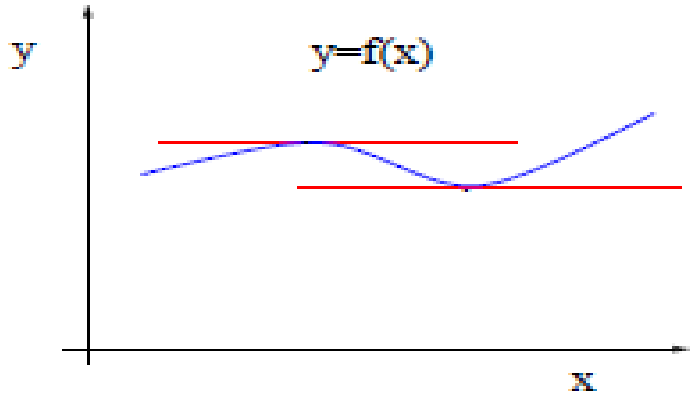
$$w(x)=u(x)+\varepsilon v(x) \qquad I[\varepsilon]=\int_a^b F(x,w,w_x)dx$$



  - Condizione necessaria per estremale:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=0$$

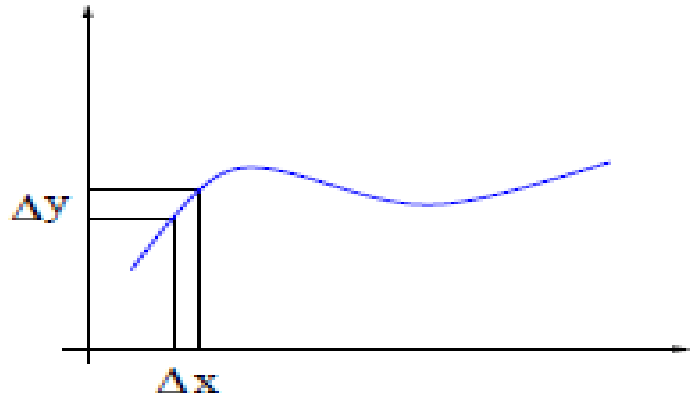
Come localizzare i massimi e i minimi:



Questo va bene per funzioni a valori reali, ma l'interpretazione geometrica può venire meno in casi più generali. Per trovare un'interpretazione analitica della pendenza della retta tangente, facciamo delle piccole variazioni $\Delta x = x' - x$ della variabile indipendente e indichiamo con

$$\Delta f(x) = f(x') - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

la corrispondente piccola variazione della variabile dipendente.



Ad esempio, per la funzione $f(x) = 3x^2 + 1$ si ha

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

In generale, se abbiamo un'espressione del tipo

$$\Delta f(x) = L\Delta x + \epsilon(\Delta x) \qquad \text{con} \qquad \epsilon(\Delta x) << \Delta x,$$

allora L rappresenta proprio il coefficiente angolare della retta tangente.

Un punto x si dice *stazionario* se la formula sopra vale con $L = 0$. In altri termini, nei punti stazionari le variazioni della variabile dipendente sono molto piccole in rapporto alle variazioni della variabile indipendente.

Quindi, per localizzare i punti x di massimo o di minimo cercheremo punti x nei quali

$$\Delta f(x) = \epsilon(\Delta x) \qquad \text{con} \qquad \epsilon(\Delta x) << \Delta x.$$

Il calcolo differenziale sviluppa dei metodi generali per calcolare Δf per ampie classi di funzioni f.

Il problema isoperimetrico

Il problema isoperimetrico, o meglio una sua variante, ha origine in una leggenda, raccontata da Virgilio nell'Eneide: la regina Fenicia Didone ottenne dal re locale Jarbas, per sé e per la sua gente, tanta terra quanta sarebbe riuscita a contenerne la pelle di un bue.

Didone non si scoraggiò e, per prima cosa, tagliò la pelle in sottili strisce ottenendo una lunga corda; poi, la dispose in modo da **racchiudere** una regione di **area massima**.
Il problema è quindi:
assegnato un perimetro P, quale è la regione di area massima con quel dato perimetro ?
Un'altra formulazione (apparentemente diversa, ma equivalente) dello stesso problema è: ***assegnata un'area A, quale è la regione di perimetro minimo di area A ?***

– **La leggenda**
Virgilio, Eneide, libro I, 367-368

...“mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.”

...“Giunsero in questi luoghi, ovor vedrai
sorger la gran cittade e lalta rocca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsa nomossi, per lastuta merce
che, per fondarla, fer di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.”

Didone non si scoraggiò e, per prima cosa, tagliò la pelle in sottili strisce ottenendo una lunga corda; poi, la dispose in modo da **racchiudere** una regione di **area massima**.
Il problema è quindi:
assegnato un perimetro P, quale è la regione di area massima con quel dato perimetro ?
Un’altra formulazione (apparentemente diversa, ma equivalente) dello stesso problema è: ***assegnata un’area A, quale è la regione di perimetro minimo di area A ?***

– **La leggenda**

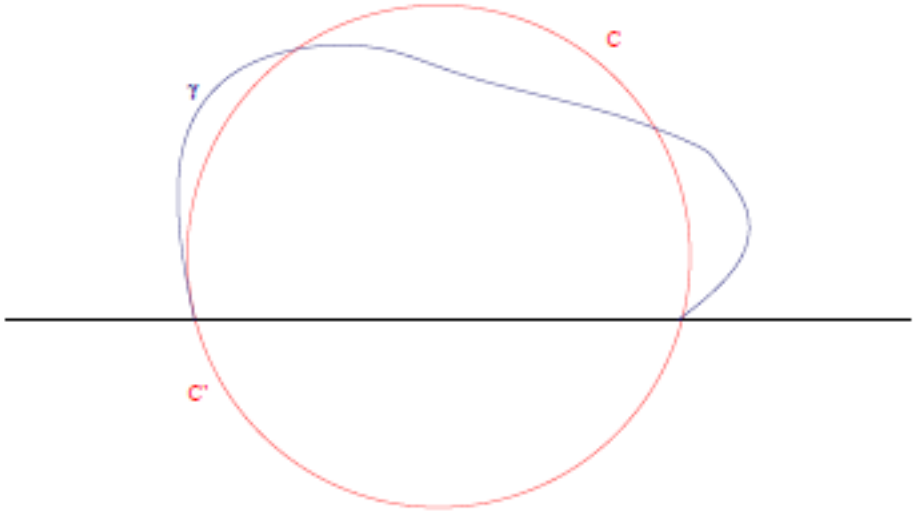
Virgilio, Eneide, libro I, 367-368

...“mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.”

...“Giunsero in questi luoghi, ovor vedrai
sorger la gran cittade e lalta rocca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsa nomossi, per lastuta merce
che, per fondarla, fer di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.”

Didone non si scoraggiò e, per prima cosa, tagliò la pelle in sottili strisce ottenendo una lunga corda; poi, la dispose in modo da

ra
Il
as
di
Ur
div
è:
pe



Lo stesso problema si può porre nello spazio invece che nel piano (considerando l'area superficiale e il volume racchiuso da un solido) e la soluzione, nel mondo fisico, ci è fornita dalla forma delle bolle di sapone, ovvero la forma sferica.

Il problema isoperimetrico, rispetto ai problemi precedentemente trattati, si pone su un livello di difficoltà estremamente superiore: i "gradi di libertà" del problema (tutte le figure possibili) sono infiniti, e non è neanche ovvio che una soluzione ci debba essere. Infatti, tutti i metodi "di variazione" *partono dal presupposto dell'esistenza di una soluzione* e a partire da questo presupposto, consentono di individuarla.

Lo stesso problema si può porre nello spazio invece che nel piano (considerando l'area superficiale e il volume racchiuso da un solido) e la soluzione, nel mondo fisico, ci è fornita dalla forma delle bolle di sapone, ovvero la forma sferica.

Il problema isoperimetrico, rispetto ai problemi precedentemente trattati, si pone su un livello di difficoltà estremamente superiore: i "gradi di libertà" del problema (tutte le figure possibili) sono infiniti, e non è neanche ovvio che una soluzione ci debba essere. Infatti, tutti i metodi "di variazione" *partono dal presupposto dell'esistenza di una soluzione* e a partire da questo presupposto, consentono di individuarla.

In effetti, mostrare che il problema ha almeno una soluzione (prima di cercare di determinarla, più o meno esplicitamente) porta a una riflessione critica su come si debba formulare rigorosamente il problema, che qui abbiamo posto in termini solo informali, specificando cosa si intende per *regione*, *area*, *perimetro*, *solido*, *volume*, *area superficiale*, etc.

Una delle grandi conquiste della Matematica del XX secolo è stata quella di sviluppare metodi per trattare questo tipo di problemi con infiniti gradi di libertà, mostrando *a priori* l'esistenza di soluzioni. Nel caso del problema isoperimetrico, si può dire che la soluzione definitiva del problema, che mostra anche che il cerchio e la palla sono le *uniche* soluzioni, è stata ottenuta da De Giorgi solo nel 1958.

Il linguaggio dei funzionali. Torniamo ancora al problema isoperimetrico classico, nel piano. Per ogni "figura" E (lasciando nel vago il significato preciso della parola "figura") consideriamo la quantità:

$$J(E) = \frac{\text{Perimetro di } E}{\sqrt{\text{Area di } E}}$$

Se il perimetro è misurato in metri e l'area in metri quadri, il fatto che l'area compaia sotto radice fa sì che il quoziente $J(E)$ risulti un numero puro (adimensionale). Se mettiamo la figura E sotto una lente d'ingrandimento, il perimetro aumenterà di un certo fattore, l'area aumenterà *del quadrato* di quel fattore, e in definitiva $J(E)$ non cambierà: in altre parole il valore di $J(E)$ *dipende dalla forma ma non dalle dimensioni assolute di E.* Questo ragionamento suggerisce che la quantità $J(E)$ sia quella che è più naturale studiare nell'affronto del problema isoperimetrico. Una quantità di questo tipo si chiama *funzionale*; è una funzione che ad ogni *insieme* di un certo universo assegna un numero, ed il problema isoperimetrico si può riformulare come la ricerca dell'insieme E che rende minimo questo funzionale.

Il linguaggio dei funzionali. Torniamo ancora al problema isoperimetrico classico, nel piano. Per ogni "figura" E (lasciando nel vago il significato preciso della parola "figura") consideriamo la quantità:

$$J(E) = \frac{\text{Perimetro di } E}{\sqrt{\text{Area di } E}}$$

Se il perimetro è misurato in metri e l'area in metri quadri, il fatto che l'area compaia sotto radice fa sì che il quoziente $J(E)$ risulti un numero puro (adimensionale). Se mettiamo la figura E sotto una lente d'ingrandimento, il perimetro aumenterà di un certo fattore, l'area aumenterà *del quadrato* di quel fattore, e in definitiva $J(E)$ non cambierà: in altre parole il valore di $J(E)$ *dipende dalla forma ma non dalle dimensioni assolute di E.* Questo ragionamento suggerisce che la quantità $J(E)$ sia quella che è più naturale studiare nell'a

funzi

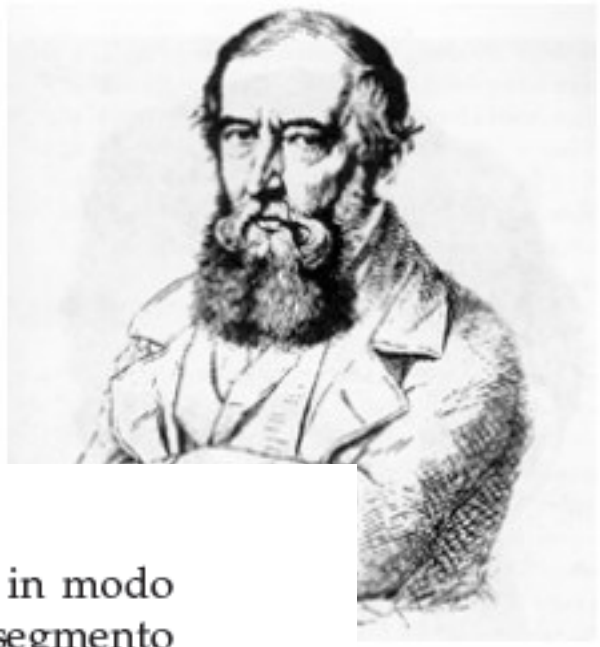
nume E

che re

Per concludere questa sezione, torniamo a Didone: detto $r = P/(2\pi)$ il raggio del cerchio, l'area massima A ottenibile è

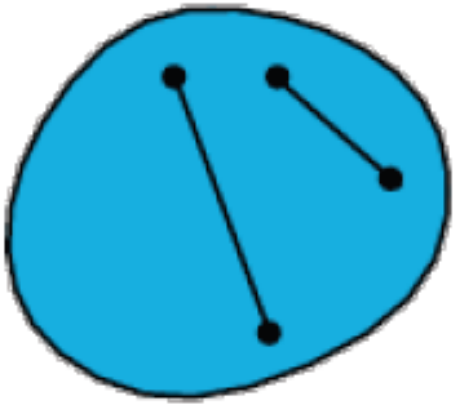
$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4\pi} P^2.$$

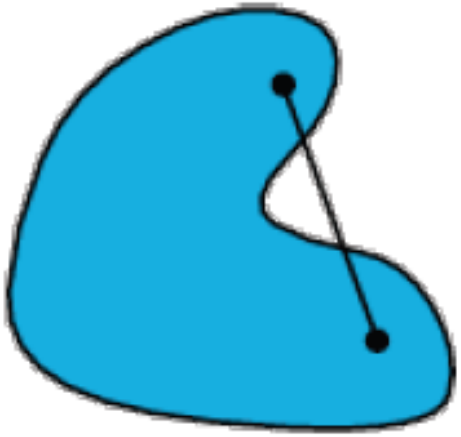
Jakob Steiner

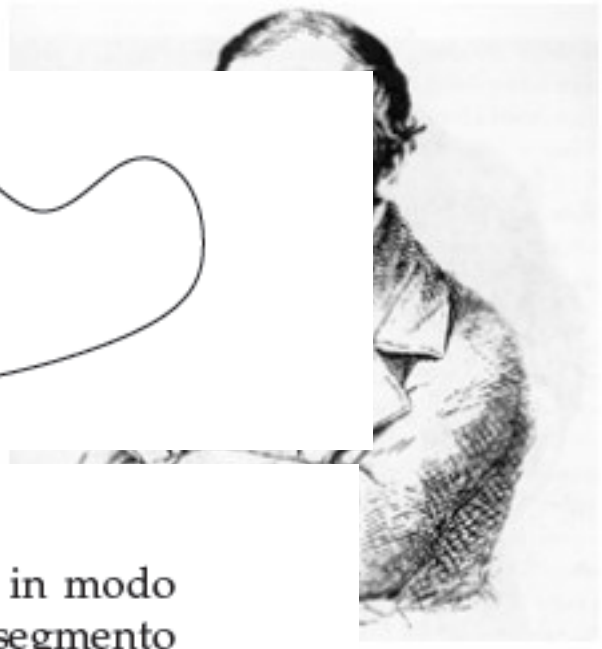


I) La regione A racchiusa da γ dev'essere convessa.

Questo vuol dire che la regione non ha rientranze, ossia, detto in modo piú preciso: se uniamo due punti di A con un segmento, questo segmento è tutto contenuto dentro A. Nella figura seguente, la regione a sinistra è convessa, quella a destra no.

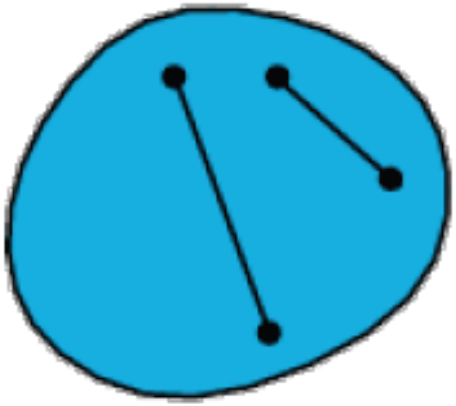


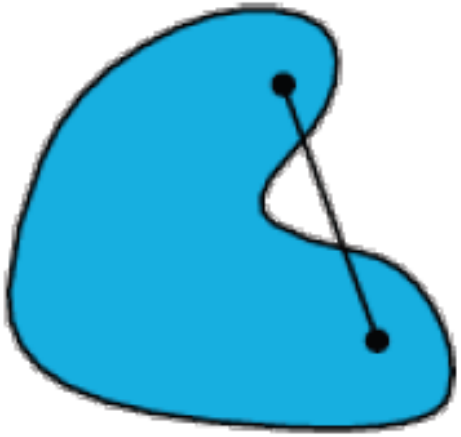


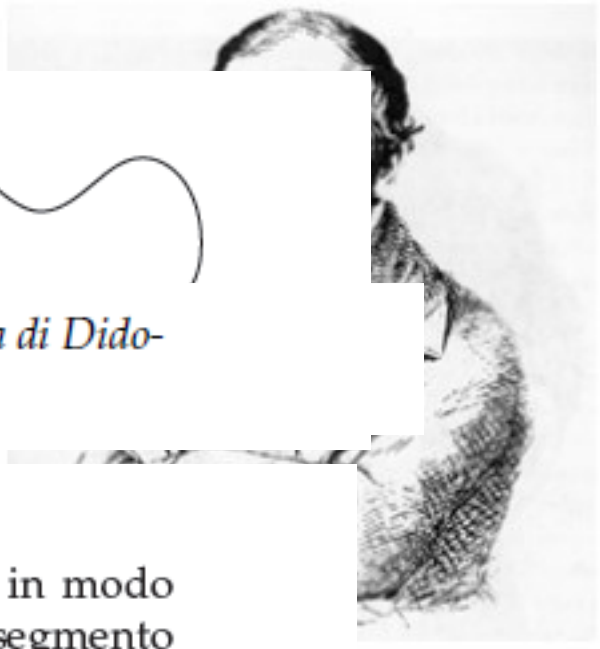


I) La regione A racchiusa da γ dev'essere convessa.

Questo vuol dire che la regione non ha rientranze, ossia, detto in modo piú preciso: se uniamo due punti di A con un segmento, questo segmento è tutto contenuto dentro A. Nella figura seguente, la regione a sinistra è convessa, quella a destra no.



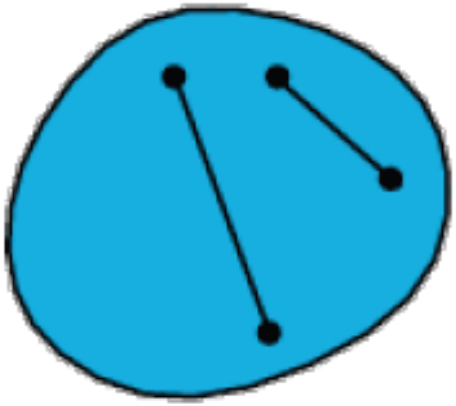


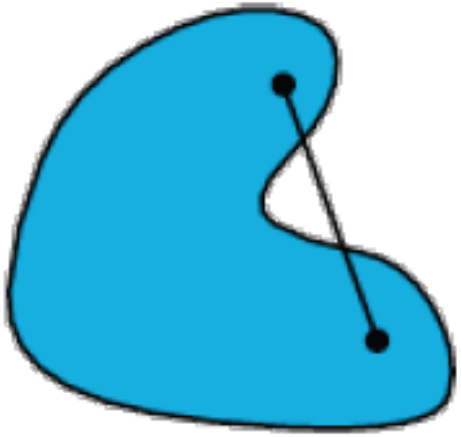


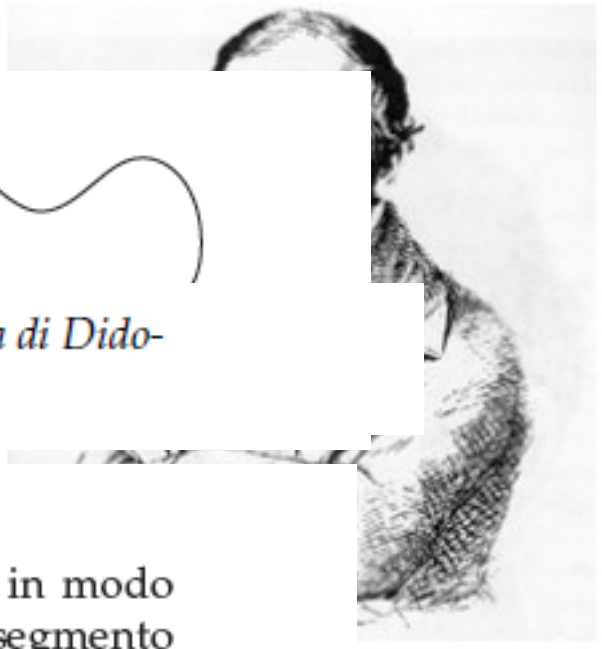
II) Per risolvere il problema isoperimetrico, basta risolvere il problema di Dido-ne e raddoppiare la figura ottenuta.

I) La regione A racchiusa da γ dev'essere convessa.

Questo vuol dire che la regione non ha rientranze, ossia, detto in modo piú preciso: se uniamo due punti di A con un segmento, questo segmento è tutto contenuto dentro A. Nella figura seguente, la regione a sinistra è convessa, quella a destra no.



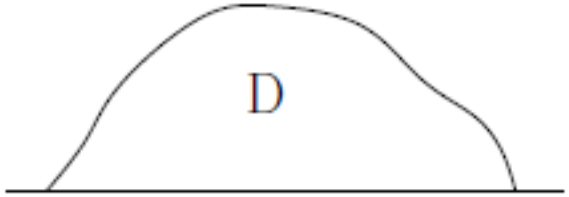


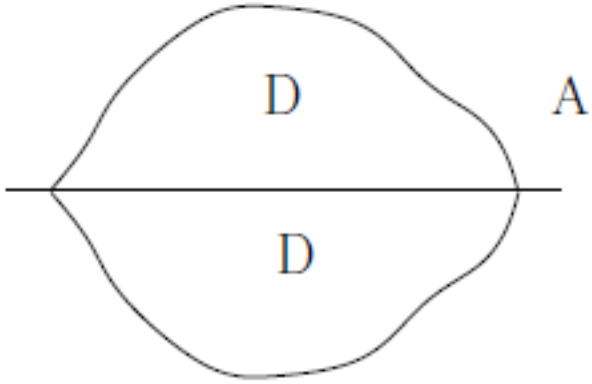


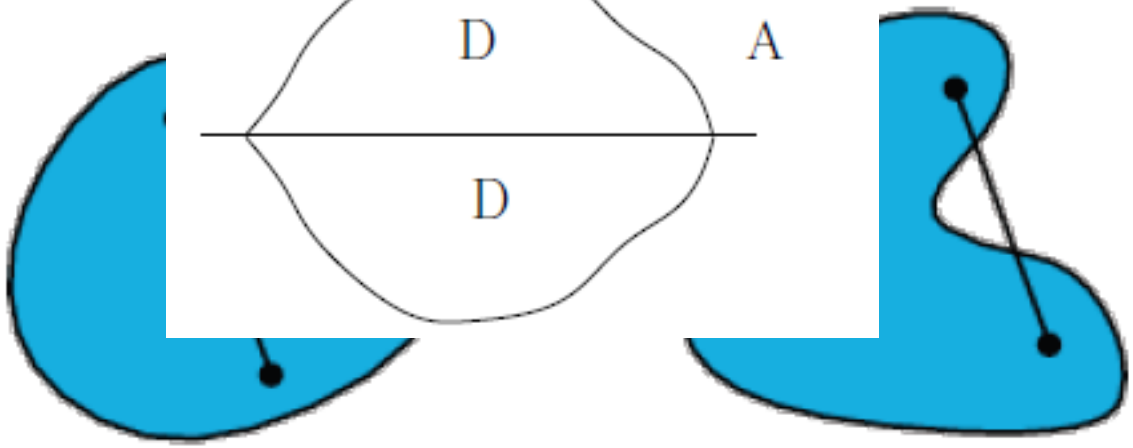
II) Per risolvere il problema isoperimetrico, basta risolvere il problema di Dido-
ne e raddoppiare la figura ottenuta.

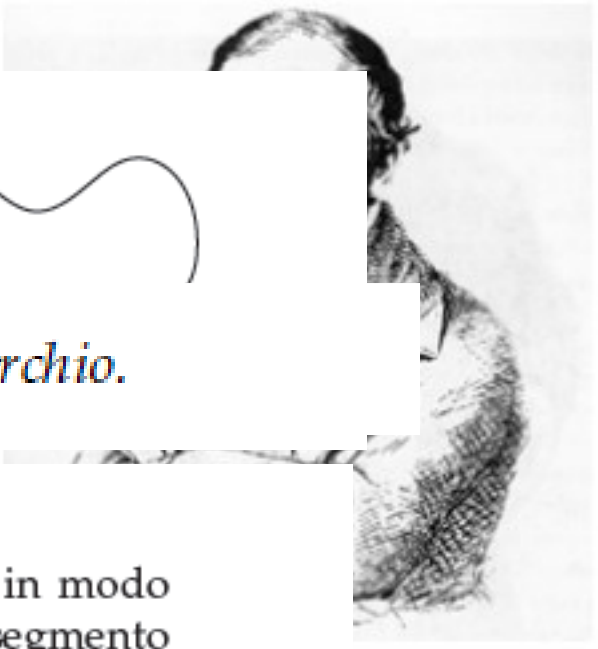
I) La regione A

Questo vuol dir ossia, detto in modo
piú preciso: se u nto, questo segmento
è tutto contenut a regione a sinistra è
convessa, quella





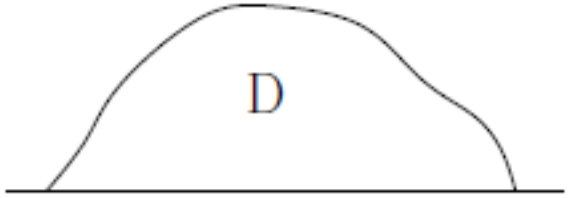


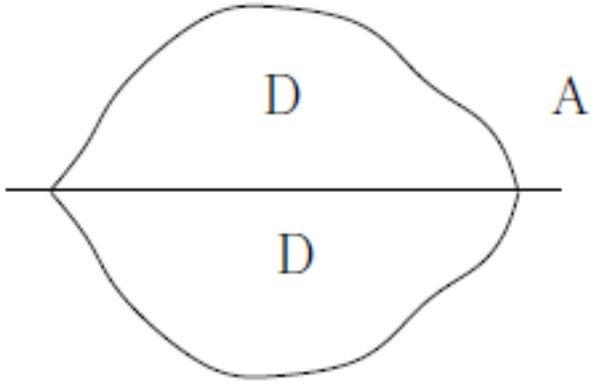


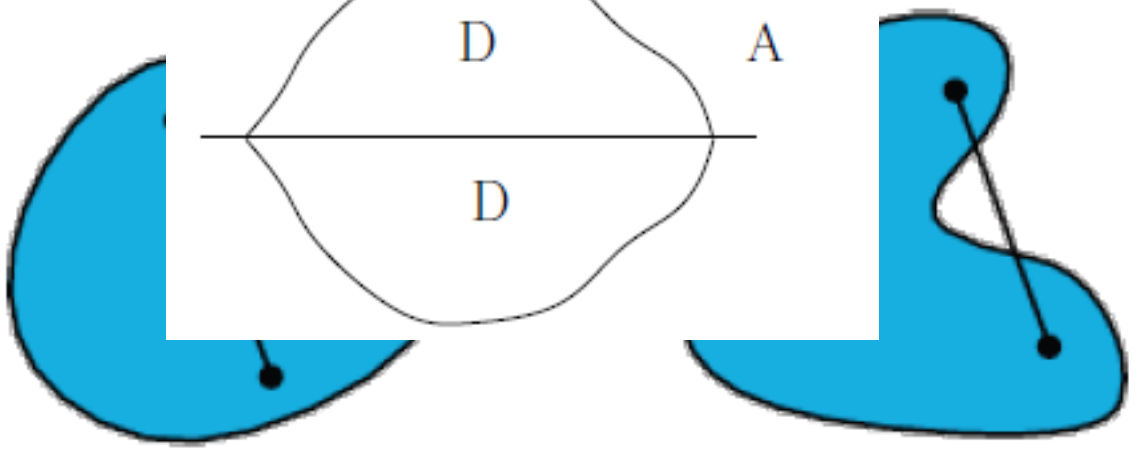
III) La soluzione del problema di Didone è un semicerchio.

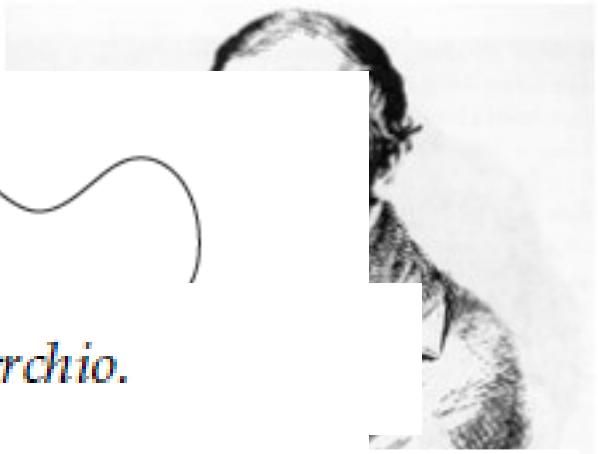
I) La regione

Questo vuol dir ossia, detto in modo
piú preciso: se u nto, questo segmento
è tutto contenut a regione a sinistra è
convessa, quella

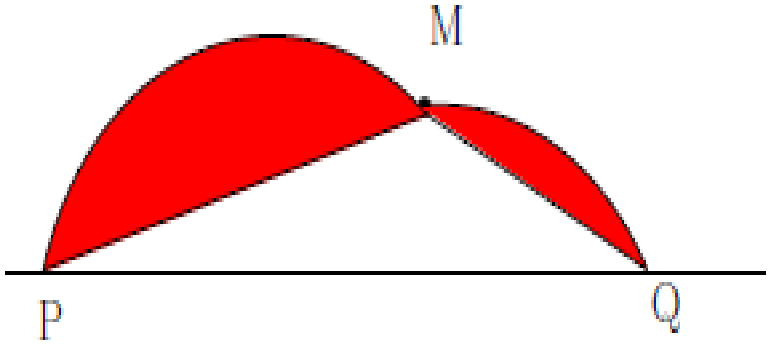


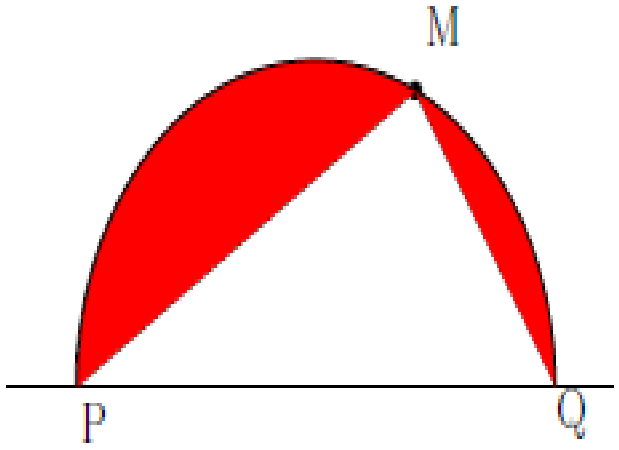






III) La soluzione del problema di Didone è un semicerchio.

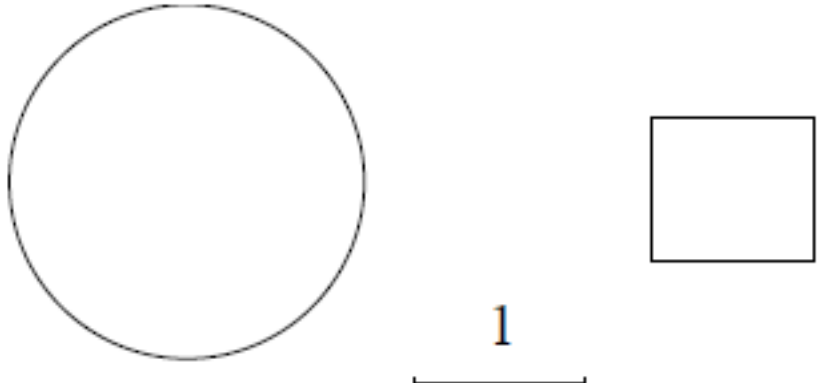




MA ESISTENZA??

Per evidenziare il tipo di trabocchetto logico nella quale sono caduti anche matematici illustri del XIX secolo, ricordiamo il cosiddetto problema di Kakeya: consideriamo tutte le regioni chiuse del piano all'interno delle quali è possibile far ruotare di 360^0 gradi, in maniera continua (eventualmente traslandolo), un segmento di lunghezza 1.

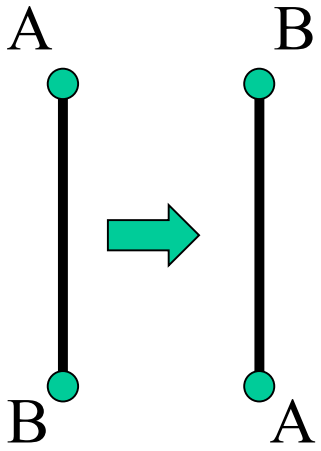
Due possibili regioni sono ad esempio il cerchio di raggio 1 e il quadrato di lato 1:

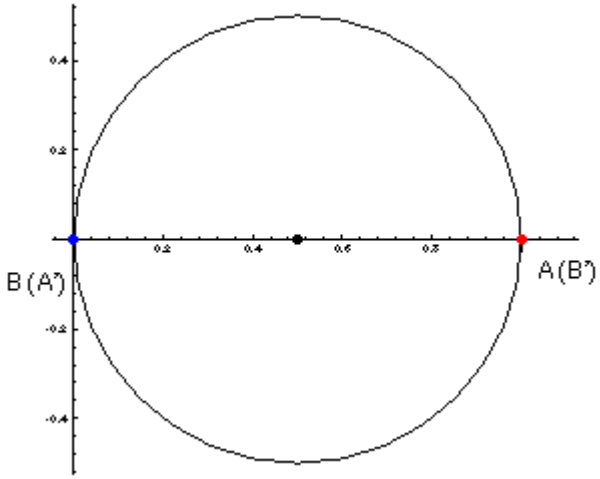


Il problema di Kakeya è: *qual'è, tra tutte le regioni possibili, quella di area minima ?*

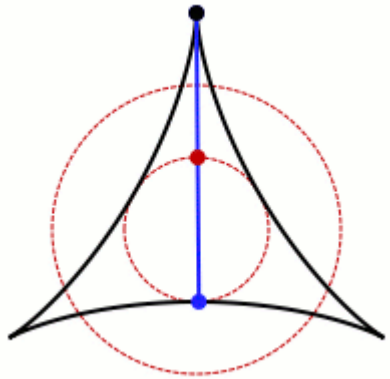
Per lungo tempo si è pensato che la soluzione del problema fosse un triangolo curvilineo di area $\pi/8$. Sorprendentemente il matematico russo Besicovitch ha mostrato nel 1927 che il problema in realtà *non ha* soluzione: si possono costruire figure di area arbitrariamente piccola con questa proprietà !

Noi possiamo ridurre l'area di un fattore 2 ruotando intorno al punto medio*: ruotiamo il segmento AB rispetto al punto medio, risulta un'area di "soli"* $\pi/4$





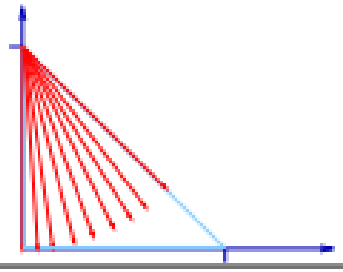
Possiamo fa di meglio



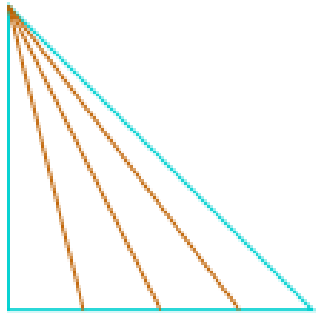
Il problema di Kakeya

Ogni sottoinsieme di R^n che contenga un segmento di lunghezza unitaria in ogni direzione è chiamato *insieme di Kakeya*.
Nel 1920 il matematico russo Besicovitch dimostrò che esistono insiemi di Kakeya di area nulla.
Il suo risultato purtroppo non venne subito diffuso al di fuori della Russia e solo molti anni dopo, quando emigrò, Besicovitch venne a sapere che in Giappone c'era un altro matematico, Kakeya, che si stava ponendo un problema simile già dal 1917.
Il problema di Kakeya era: "Qual è nel piano l'insieme di area minima in cui un ago può ruotare di 180 gradi?"
Una formulazione alternativa sarebbe trovare il minimo spazio di manovra necessario per parcheggiare una macchina a forma di ago.
Nel 1921 Pal aveva dimostrato che tra gli insiemi convessi quelli che risolvono il problema di Kakeya sono i triangoli equilateri.
Ma essere convessi è una proprietà abbastanza eccezionale per un insieme!
Non si poteva escudere che tra tutte le figure che Pal non aveva considerato ce ne fosse una di area ancora più piccola con la proprietà richiesta da Kakeya.
Besicovitch, a partire dalla sua prima dimostrazione, provò che per ogni valore fissato dell'area (anche piccolissimo, purché maggiore di zero) si può costruire un insieme che risolve il problema di Kakeya.
Per avere un'idea della dimostrazione di Besicovitch potete guardare l'animazione nei computer a disposizione o accontentarvi di queste figure.

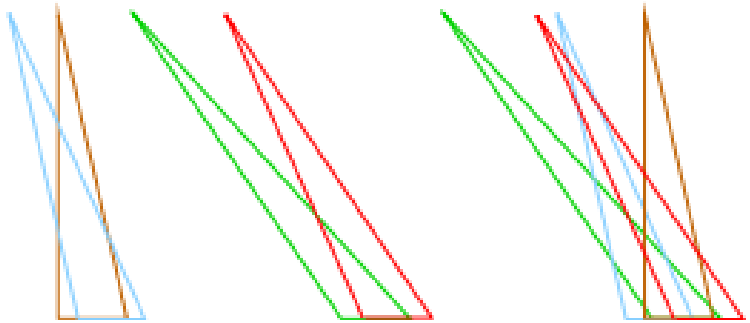
- Prendiamo un triangolo rettangolo isoscele con i lati congruenti lunghi uno. Questo è "un quarto" di un insieme di Kakeya nel piano, (Fig. 1);



- "affettiamo" il nostro triangolo in modo da ottenere tanti triangolini sottili, (Fig. 2);



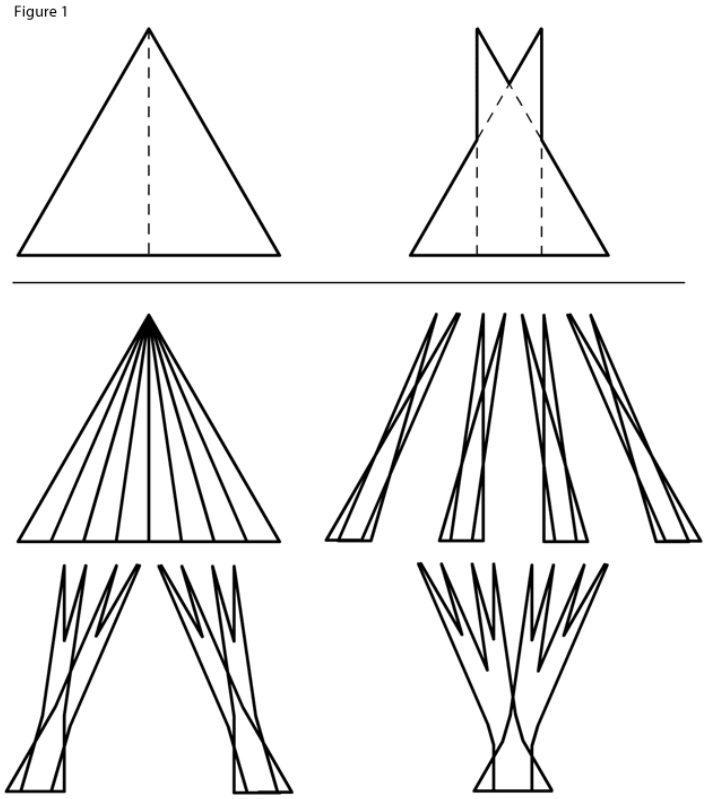
- li sistemiamo in modo che si sovrappongano, (Fig. 3);

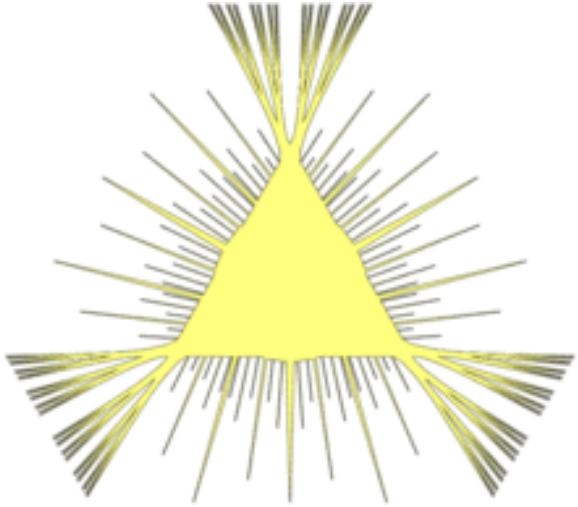


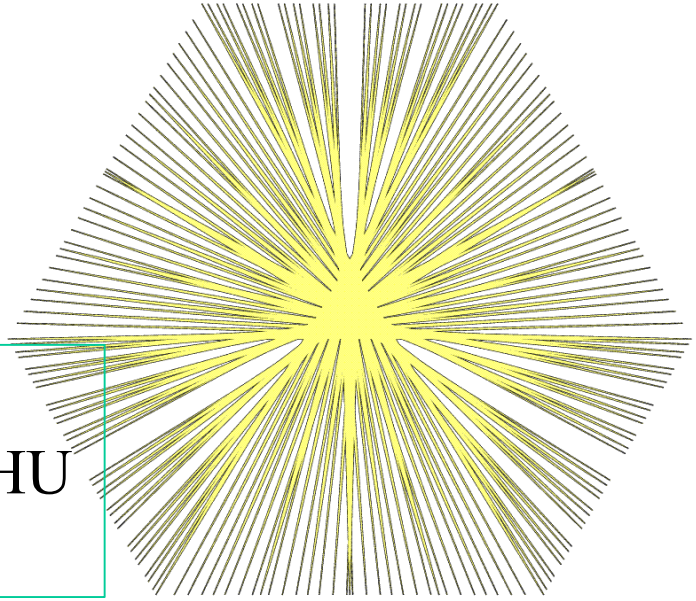
- se abbiamo tagliato e sovrapposto nel "modo giusto" otteniamo degli insiemi di Kakeya di area sempre più piccola.

Osservazione. Con una costruzione simile si può ottenere un insieme di misura nulla nel piano che contiene una circonferenza di raggio r per ogni valore di $r \geq 0$.

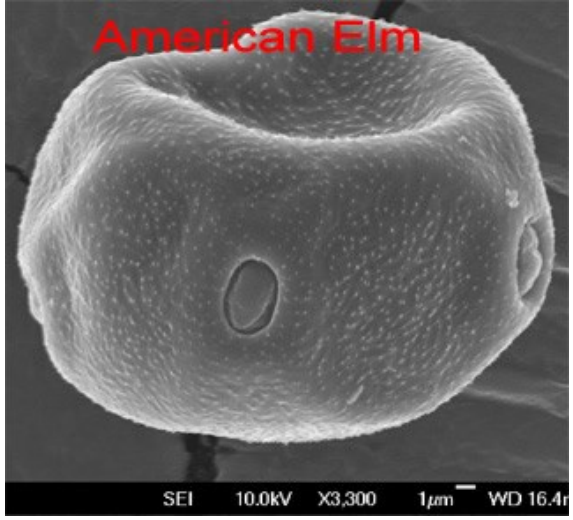
Nel 1958 il problema di Kakeya è stato scelto dalla Mathematical Association of America come argomento del loro primo filmato divulgativo. Il film era narrato dalla voce dello stesso Besicovitch!

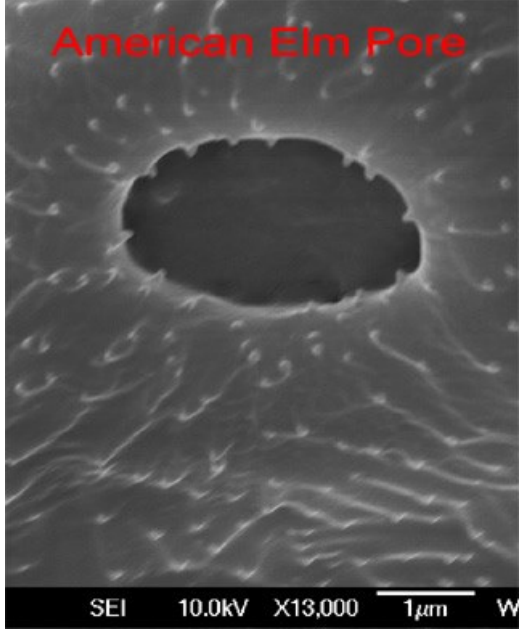


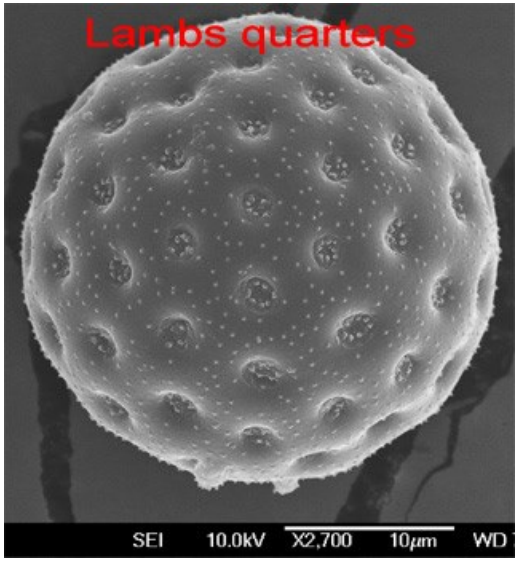


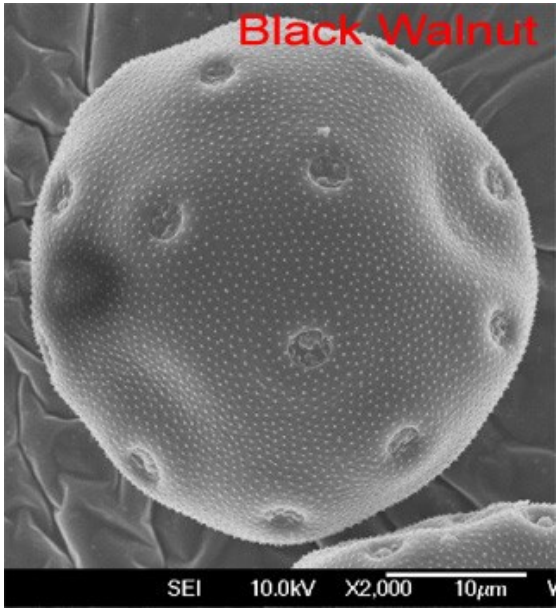


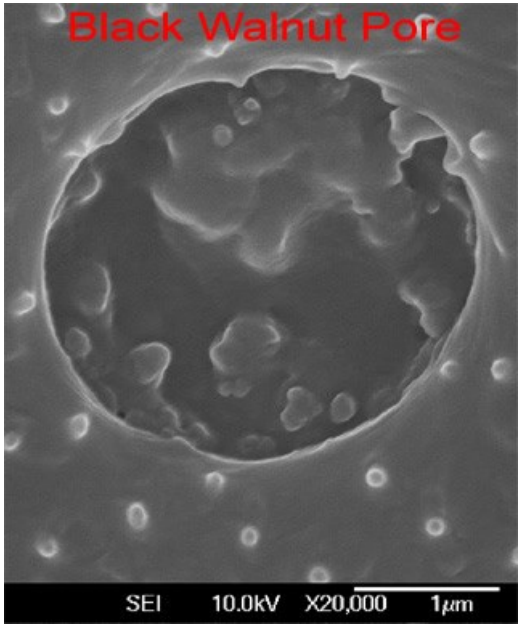
Video, costruzione per Kakeya Problem,
https://www.youtube.com/watch?v=IM-n9c-ARHU


American Elm
SEI 10.0kV X3,300 1μm


American Elm Pore
SEI 10.0kV X13,000 1μm


Lambs quarters
SEI 10.0kV X2,700 10μm


Black Walnut
SEI 10.0kV X2,000 10μm

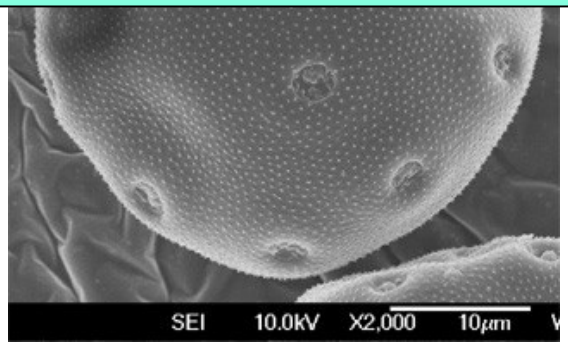

Black Walnut Pore
SEI 10.0kV X20,000 1μm

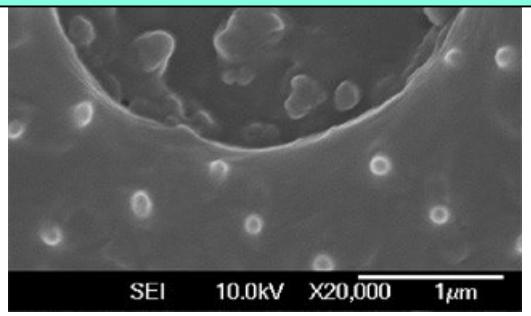
Il problema di Tammes

Il **problema di Tammes** prende il nome dal botanico olandese **Pieter Merkus Lambertus Tammes** (1903-1980) che pose la questione nel 1930 in relazione allo studio dei pori sui granelli sferici di polline.

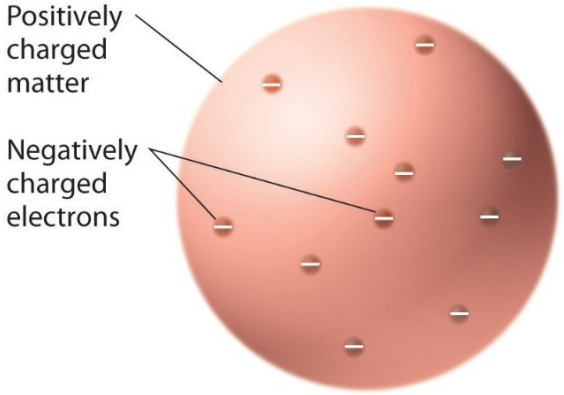
Il problema di Tammes si può formulare nel modo seguente:

- Come ricoprire, senza sovrapposizioni, la superficie di una sfera con n 'regioni' uguali in modo tale che il loro diametro d_n sia il più grande possibile?
- Come si devono sistemare queste regioni in modo da raggiungere il massimo richiesto?
- La soluzione, per ogni n, è unica?





Un problema analogo riguarda lo studio della disposizione di particelle puntiformi su una superficie sferica. Le particelle possiedono forze che interagiscono tra di loro e tendono a raggiungere stati d'equilibrio.
Il problema è spesso denominato **problema di Thomson**, perché fu formulato per la prima volta da J.J. Thomson, lo scopritore dell'elettrone, quando nel 1904 propose il suo modello atomico "a panettone", secondo il quale l'atomo sarebbe stato costituito da una distribuzione di carica positiva diffusa, all'interno della quale erano inserite le cariche negative come i canditi in un panettone. Nel complesso l'atomo risultava elettricamente neutro. Il modello fu confutato dall'esperimento di Geiger e Marsden nel 1909, che spinse Ernest Rutherford nel 1911 a proporre un proprio modello alternativo, nel quale la carica positiva era concentrata in un nucleo.



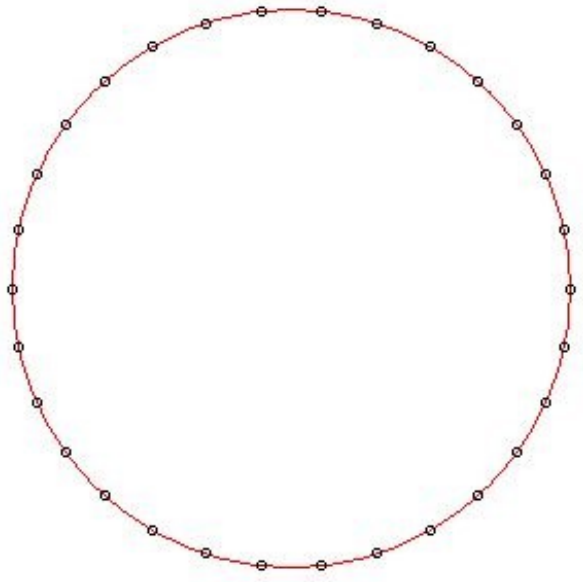
Well-distributed points on the sphere

Let $\omega_N=\{X_1, \dots, X_N\}\subset S^{d-1}$ - the unit sphere in d-dimensional space R^d : $\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \}$.

$$S^{d-1} = \{ X : x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \dots + x_d^{\,2} = 1 \}$$

How do we distribute "well" the points?

- *For d=2, this problem is simple.The solution is up to rotations the roots of unity.*



Reason - direction and order

Minimum Energy Problem on the Sphere

Given an N-point configuration $\omega_N=\{X_1, \dots, X_N\}$ on the sphere S^2 we define its <u>generalized energy</u> as

$$E_\alpha(\omega_N)=\Sigma_{i\neq j}|X_i-X_j|^{-\alpha}.$$

- ***<u>Maximize</u>*** $E_\alpha(\omega_N)$ ***when*** $\alpha>0$;
- ***<u>Minimize</u> it when*** $\alpha<0$;
- ***When*** $\alpha=0$ ***<u>minimize</u> the logarithmic energy***

$$E_0(\omega_N)=\Sigma_{i\neq j}\log(1/|X_i-X_j|)$$

or maximize the product $P(\omega_N)=\exp(-E_0(\omega_N))$.

Denote the extremal energy with $E_\alpha(N,d)$.

$\alpha = 1$ Except for small N a long standing open problem in discrete geometry (L. Fejes Toth - 1956)

$\alpha \rightarrow -\infty$ Tammes problem; maximize the minimum distance between any pair of points. Known for N= 1-12 and 24. *(Best packing points)*

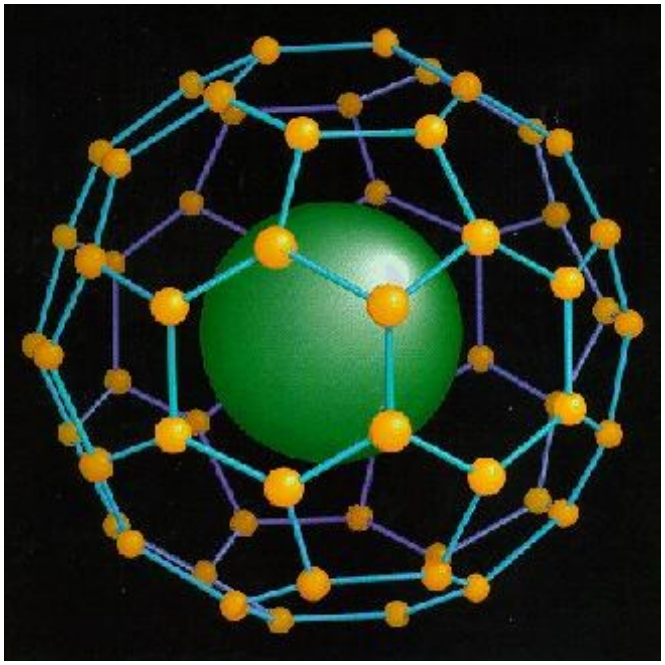
$\alpha = -1$ Thompson problem; recent discovery of fullerenes attracted the attention of researchers in chemistry, physics, crystallography. Answer known for N=1-4, 6, 12. *(Fekete Points)*

$\alpha = 0$ The problem was posed by L. L. Whyte in 1952. Until recently the answer was known only for N=1-4. *(Logarithmic Points)*

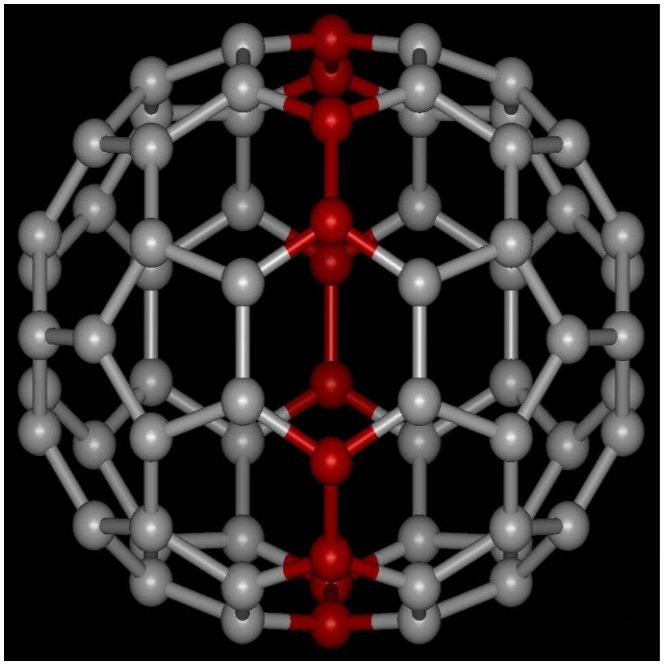
Motivation from Chemistry

- **Fullerenes (Buckyballs)**

Large carbon molecules discovered in 1985 by Richard Smalley et. el.

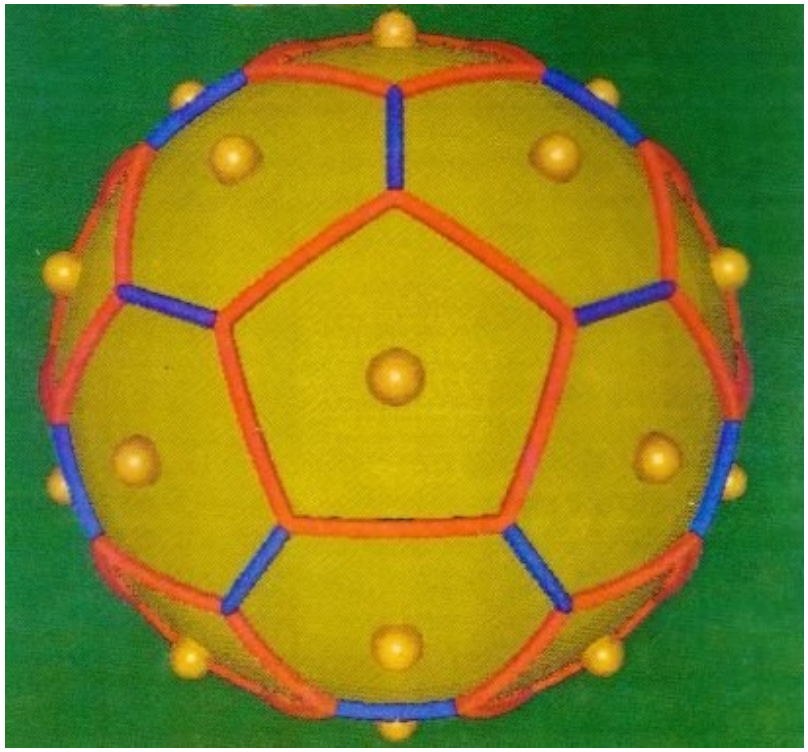


C_{60}

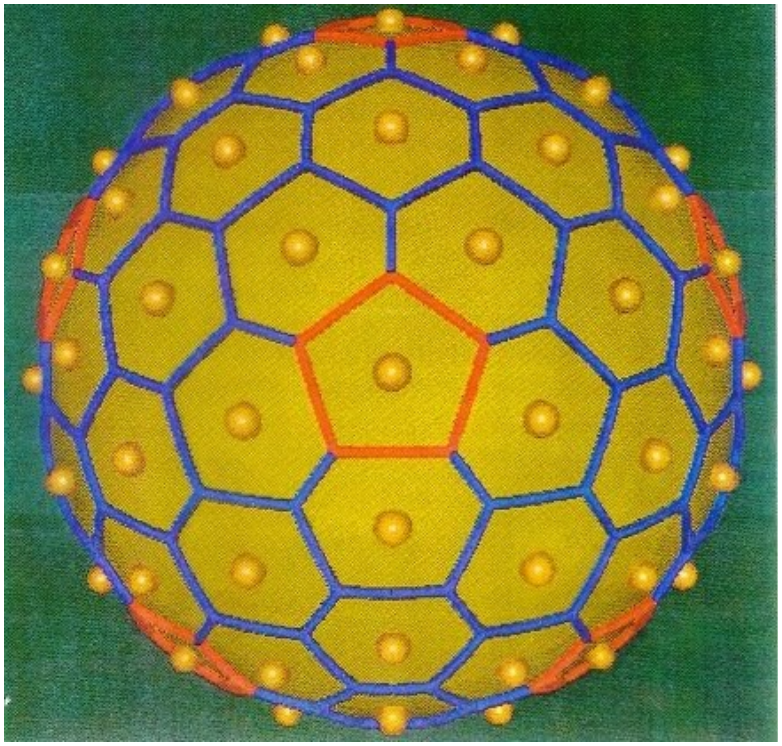


C_{70}

32 Electrons



122 Electrons



In Equilibrium

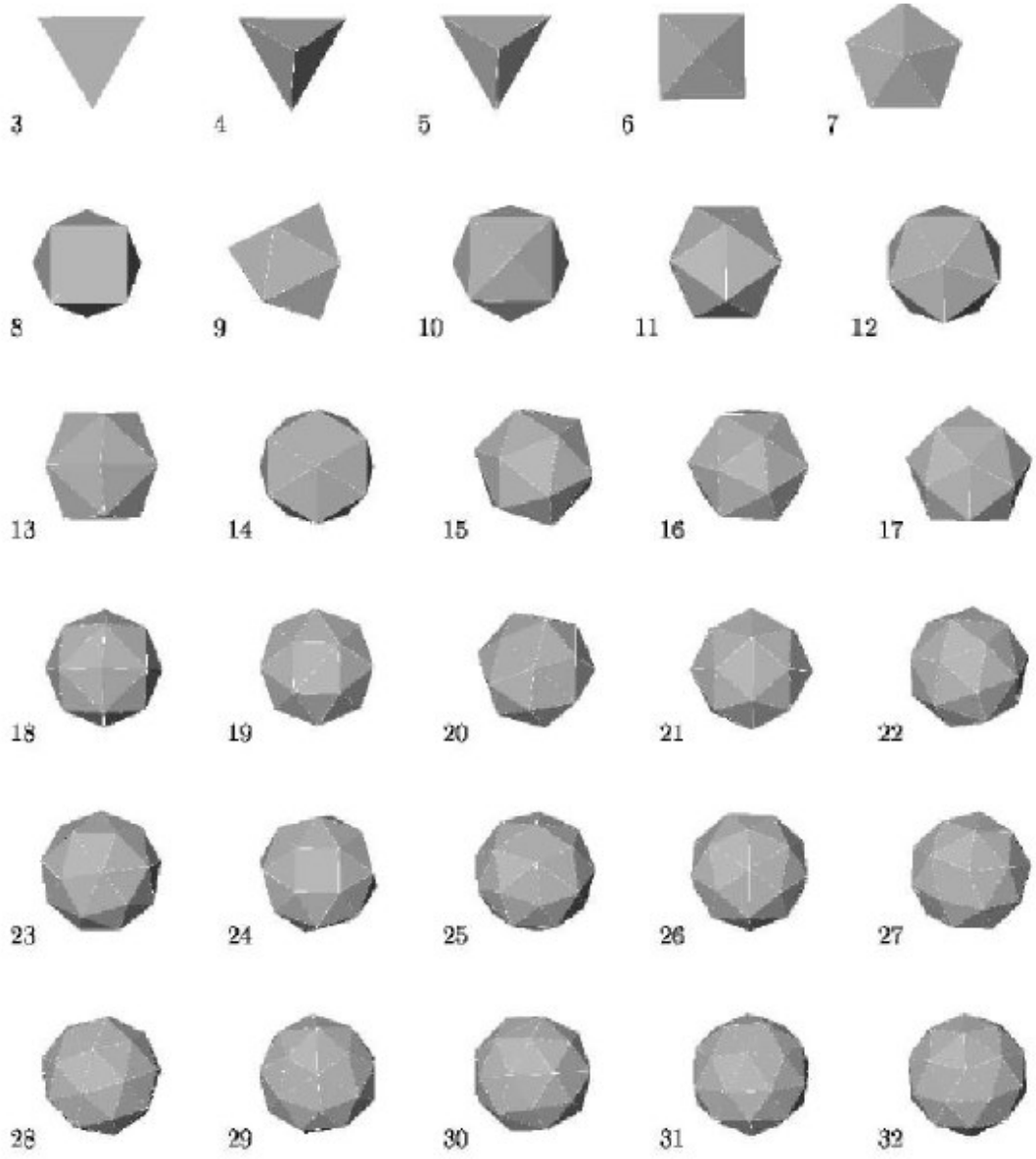
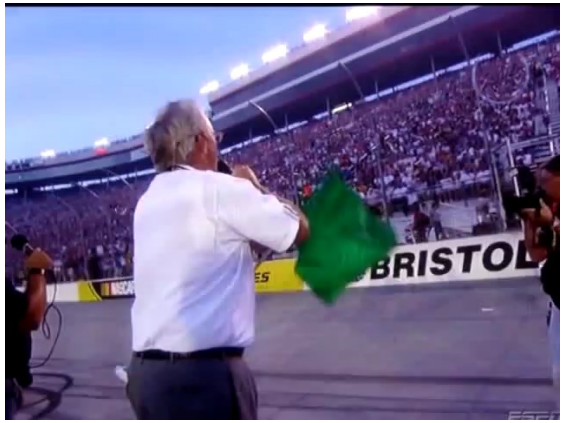


Figure 2: Polyhedra with vertices located at the n points on the sphere which minimize the energy of the Thomson problem for $3 \leq n \leq 32$.

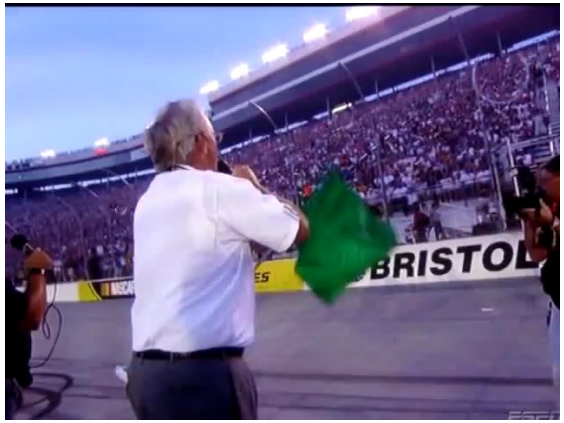
Cerchiamo un modello per la … *Ola*



Cosa serve?

Modello Probabilistico, Modello Computazionale

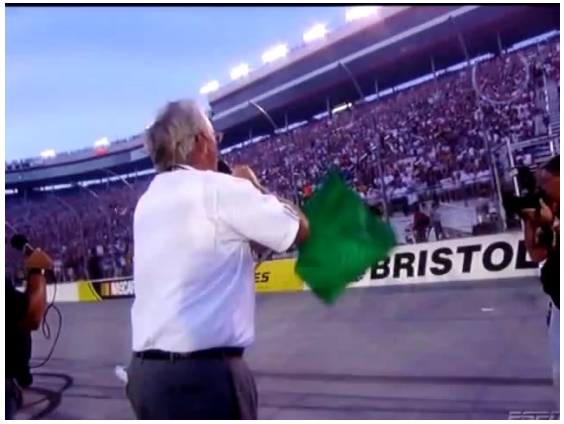
Cerchiamo un modello per la … *Ola*



Cosa serve?

Dividiamo le persone in categorie (per esem
Attive, non attive, refrattarie)

Cerchiamo un modello per la … *Ola*

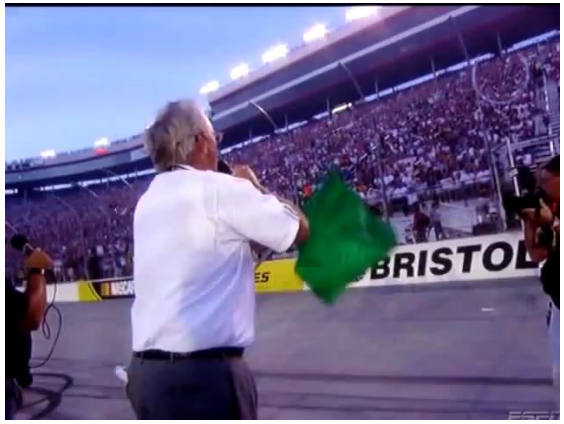


Cosa serve?

- Dividiamo le persone in categorie (per esem
  Attive, non attive, refrattarie)
- Interazioni tra individui (influenza), definisc
  un intorno di influenza, attribuisco un peso
  (lontano, vicino, cono visivo,…)

Modello Probabilistico, Modello Computazionale

Cerchiamo un modello per la … *Ola*

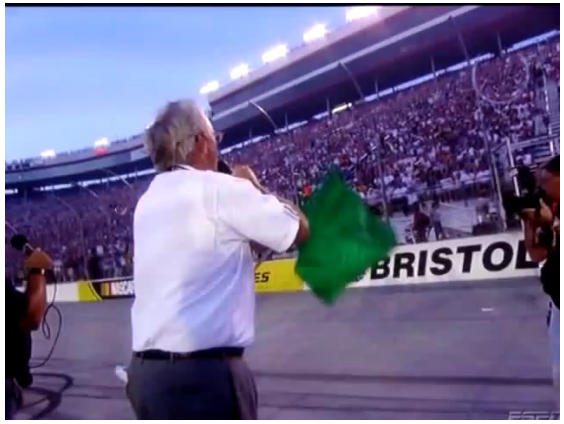


Cosa serve?

- Dividiamo le persone in categorie (per esem
  Attive, non attive, refrattarie)
- Interazioni tra individui (influenza), definisc
  un intorno di influenza, attribuisco un peso
  (lontano, vicino, cono visivo,…)
- Fenomeno a soglia, oltre un certo livello
  eventualmente mi attivo, c'è un tempo di
  Reazione.

Modello Probabilistico, Modello Computazionale

Cerchiamo un modello per la … *Ola*

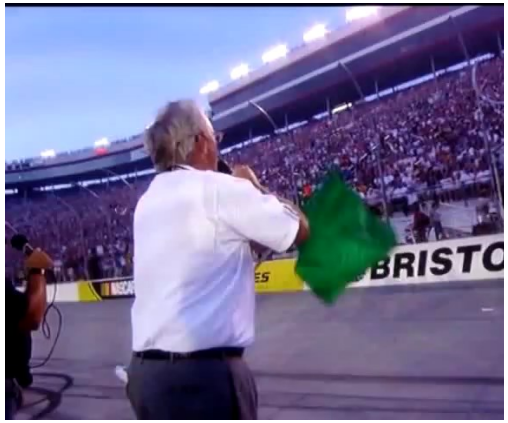


Cosa serve?

- Dividiamo le persone in categorie (per esem
  Attive, non attive, refrattarie)
- Interazioni tra individui (influenza), definisc
  un intorno di influenza, attribuisco un peso
  (lontano, vicino, cono visivo,…)
- Fenomeno a soglia, oltre un certo livello
  eventualmente mi attivo, c'è un tempo di
  Reazione.

Modello Probabilistico, Modello Computazionale

Cerchiamo un modello per la … *Ola*



nature International weekly journal of science

nature news home | news archive | specials | opinion | features | news blog | nat

comments on this story

Stories by subject
- Chemistry
- Mathematics
- Lab life

Stories by keywords
- Mexican wave
- excitable media
- football
- athletics
- crowd control

This article elsewhere
Blogs linking to

Published online 12 September 2002 | Nature | doi:10.1038/news020909-8

News

Bored fans prompt Mexican wave

Maths reveals key to stadium phenomenon.

Helen Pearson

How many fed-up fans does it take to start a Mexican wave? About 25, say researchers in Europe. Their computer models of crowds' behaviour could help control rowdy hooligans.

Since shooting to fame during the 1986 World Cup in Mexico, Mexican waves have surged through sports stadia worldwide. Spectators jump to their feet with arms outstretched - and sit down again as neighbours in the stand rise up.

Computer models could help control hooligans

© Nature

esem

efinisc

peso

llo

o di

Modello Probabilistico, Modello Computazionale

Un esempio dal … cinema

Un esempio dal … cinema

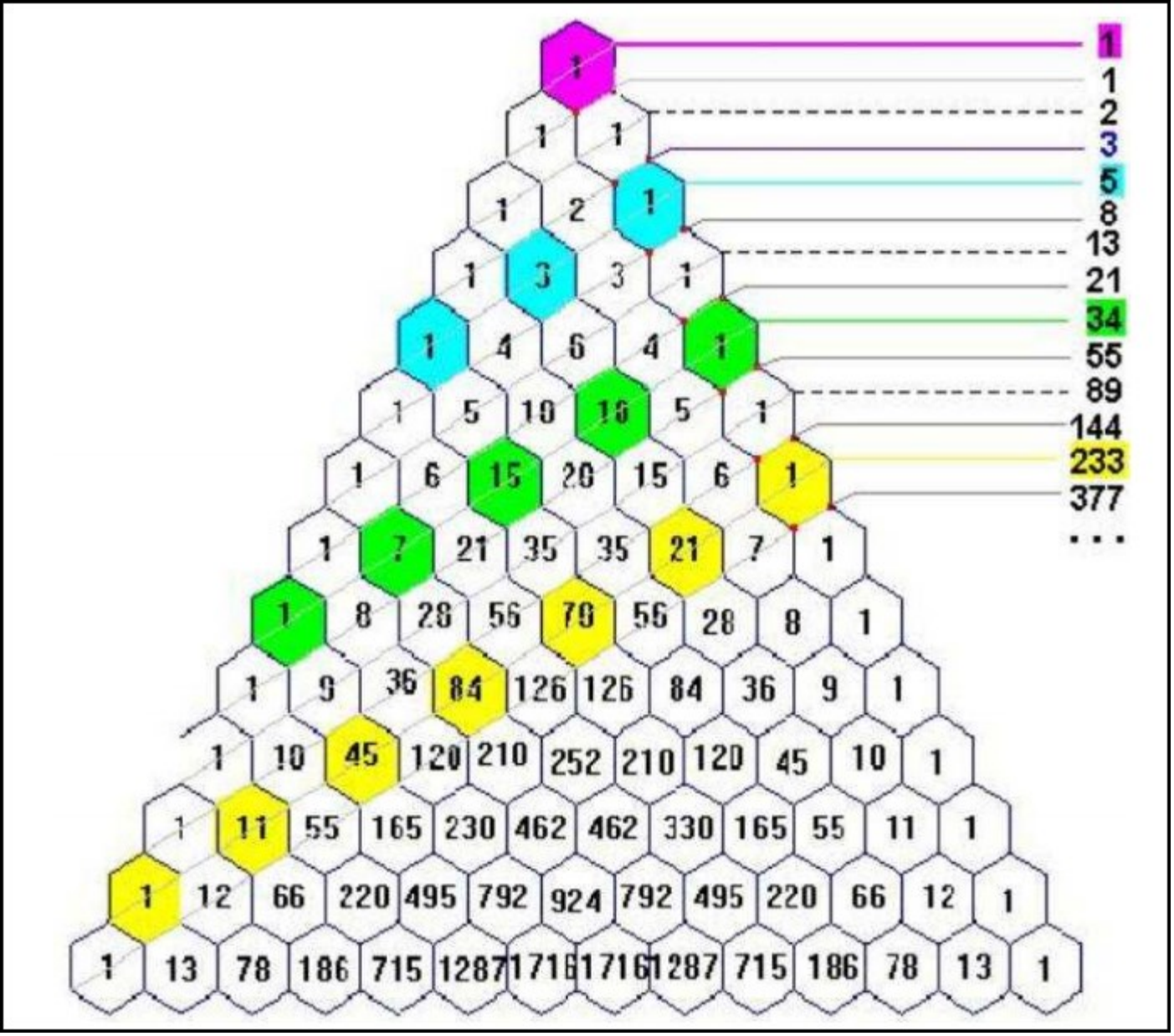
Elementi per il codice:

- una chiave pubblica;

- una funzione per la codifica;

- Un cipher.

Chiave pubblica: un intero p che viene passata durante una conferenza o simile.



Numeri di Fibonacci
E coefficienti binomiali,
un indizio sulla
lavagna di Moriarty.

Metodo: si utilizzano i p-numeri di Fibonacci

Metodo: si utilizzano i p-numeri di Fibonacci $F_p(n)$:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), \text{ con}$$
$$F_p(0) = 1,$$
$$F_p(n) = 0,\ n < 0.$$

Esempio. Se la chiave fosse p=3, abbiamo i 3-numeri di Fibonacci (iniziamo ad elencarli quando iniziano a cambiare: i primi valori sono tutti uguali ad 1).

1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26 36, 50,…

Si sceglie un libro (nel film di giardinaggio) e per ogni lettera del messaggio si seleziona una lettera uguale nel libro annotando:

Pagina, linea, numero carattere

Si organizzano i dati in formato

PP1 ll1 Nc11 Nc12 Nc13 …. Nc1K
PP2 ll2 Nc21 Nc22 Nc23 …. Nc2K
….

F_3 (n): **1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26 36, 50,…**

Per ogni valore N (può essere PP, LL, Nc,…) si codifica con la posizione n del numero di Fibonacci che fornisce la rappresentazione minimale:
$N = F_p(n) + q$, con $q < Fp(n-p)$
Insieme al valore q.

Si sceglie un libro (nel film di giardinaggio) e per ogni lettera del messaggio si seleziona una lettera uguale nel libro annotando:

Pagina, linea, numero carattere

Si organizzano i dati in formato

PP1 ll1 Nc11 Nc12 Nc13 …. Nc1K
PP2 ll2 Nc21 Nc22 Nc23 …. Nc2K
….

F_3 (n): **1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26 36, 50,…**

Esempio, abbiamo pagina=23 linea=10 Nc=10,5,3,20,
23 10 10 05 03 20
Si codifica con:
0409 0700 0700 0500 0300 0901

Ancora altro: per esempio la forma dello spazio, 1,2, 3 …. N … Infinite dimensioni

Grazie per l'attenzione